باسمه تعالی

تمرین سری یکم درس گرانش

مهلت تحویل: ۲۱/فروردین/۱۴۰۳

۱- **سرعت نور در چارچوب‌های مختلف:** سرعتِ نور در محیطِ مادیِ متحرک: حرکتِ محیطِ مادی (مانند آب) روی سرعتِ نور اثر می‌گذارد. این پدیده اولین بار در سال ۱۸۵۱ توسط فیزو (Fizeau) مشاهده شد. پرتوی نوری را در نظر بگیرید که از یک ستون افقی محتوی آب که دارای سرعت v است، می‌گذرد.

الف) نشان دهید اگر این پرتو در همان جهت شارش آب حرکت کند سرعت نوری که توسط چارچوبِ آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود از رابطهٔ زیر پیروی می‌کند، که در آن n ضریب شکستِ آب است.

$$u = \frac{c}{n}\left(\frac{1 + nv/c}{1 + v/nc}\right)$$

ب) نشان دهید برای $v \ll c$، عبارت فوق توافق خوبی با نتیجهٔ آزمایشگاهیِ فیزو که به قرارِ زیر است، دارد:

$$u \approx \frac{c}{n} + v - \frac{v}{n^2}$$

پ) با استفاده از قسمت‌های قبل، نشان دهید که برای نور، تبدیل سرعت لورنتس درست است و نه تبدیل سرعت گالیله.

۲- **سرعت نسبی:** از دید ناظر روی زمین، دو سفینهٔ A و B در جهت‌های عمود هم به یکدیگر نزدیک می‌شوند. اگر نسبت به ناظر روی زمین A با سرعت $u_y = -0.9c$ و B با سرعت $u_x = 0.9c$ حرکت کنند. خلبانِ سفینه B بردار سرعت A را چقدر اندازه‌گیری می‌کند؟

۳- **آزمونی برای اتساع زمان:** میون ذره‌ای ناپایدار است که به طور خودبه‌خود به یک الکترون و دو نوترینو واپاشی می‌کند. اگر تعداد میون‌ها در $t = 0$ برابر با N_0 باشد، تعدادش در زمان t از رابطهٔ $N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ به دست می‌آید که در آن τ طولِ عمر میون و برابر با $2.20\mu s$ است. فرض کنید میون‌ها با سرعت $0.95c$ نسبت به زمین حرکت می‌کنند و در $t = 0$ تعداد 5×10^4 میون وجود دارد.

الف) چه طول عمری برای میون از دید ناظر ساکن روی زمین مشاهده می‌شود؟

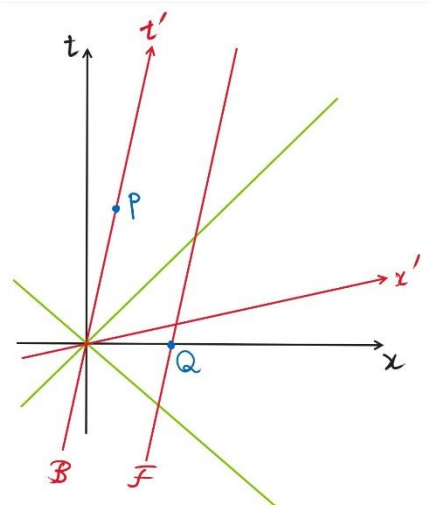
ب) پس از پیمودن $3.0km$ چه تعداد میون باقی می‌ماند؟

۴- **تبدیلات لورنتس در حالت کلی:** الف) نشان دهید در حالت کلی، تبدیلات لورنتس بین دو ناظر که با سرعت $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ نسبت به هم حرکت می‌کنند از روابط

$$\begin{cases} x^{0\prime} = \gamma(x^0 - \vec{\beta}.\vec{x}) \\ \vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\vec{\beta}.\vec{x})\vec{\beta} - \gamma x^0 \vec{\beta} \end{cases}$$

به‌دست می‌آید که در آن $(x^0, \vec{x})$ و $(x^{0\prime}, \vec{x}')$ مختصات یک پدیده در دو دستگاه مختصات مورد نظر هستند.

ب) در حالت ساده‌ای که $\vec{\beta}$ موازی محور x باشد، تبدیل $\partial_{\mu'} = (\partial_{0'}, \vec{\nabla}')$ بر حسب $\partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla})$ را به‌دست آورید.



۵-**اتساع زمان و انقباض طول:** در نمودار روبه‌رو، چارچوب قرمز، متصل به قطاری است که با سرعت ثابت v به سمت راست نسبت به شما (چارچوب سیاه‌رنگ) در حال حرکت است. جهان‌خط‌های $\mathcal{F}$ و $\mathcal{B}$، به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ ابتدا و انتهای قطار هستند. فرض کنید که ساعتی که به انتهای قطار بسته شده است، بازهٔ «زمانی» بین مبدأ و پدیدهٔ P را یک واحد زمانی نشان می‌دهد. هم‌چنین فرض کنید که طول قطار توسط شما (فاصلهٔ پدیدهٔ Q و مبدأ) یک واحد طول اندازه‌گیری شده است.

الف) با رسم هذلولی $t^2 - x^2 = 1$، به صورت هندسی و بر روی نمودار نشان دهید بازهٔ «زمانی» اندازه‌گیری شده بین مبدأ و نقطهٔ P توسط ساعتی که به انتهای قطار متصل است (یا همان زمان ویژهٔ P)، از بازه‌ای که شما برای این دو پدیده اندازه‌گیری می‌کنید کوتاه‌تر است.

ب) با رسم هذلولی $x^2 - t^2 = 1$، به صورت هندسی و بر روی نمودار نشان دهید که طول قطار از دید ناظر ساکن نسبت به آن (یا همان طول ویژهٔ قطار)، از طولی که شما برای آن اندازه‌گیری کرده‌اید بلندتر است.

پ) به طور هندسی و بر روی نمودار، و با کمک هذلولی رسم‌شده در قسمت «ب»، نشان دهید که ناظر دیگری وجود دارد که مانند شما طول قطار را یک واحد اندازه‌گیری می‌نماید.

ت) سرعت ناظر قسمت «پ» نسبت به قطار و نسبت به شما چقدر است؟

*-**گروه تبدیلات گالیله:** این گروه، گروه تبدیلات ناظرهای لخت در مکانیک کلاسیک است. برای راحتی کار فرض کنید که فضا یک‌بُعدی است و آن را توسط محور x، و زمان را توسط محور t عمود بر محور x نمایش دهید. فرض کنید دستگاه مختصات دیگری چون (t', x') وجود دارد که با سرعت یک‌نواخت u به طرف دستگاه مختصات اول حرکت می‌کند. می‌دانید که در تبدیلات گالیله

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x - ut \end{pmatrix}.$$

نشان دهید $G = \{g_u | u \in \mathbb{R}\}$ که در آن تابع g_u به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g_u \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x - ut \end{pmatrix}$$

به همراه عمل ترکیب توابع، یک گروه است. این گروه، گروه تبدیلات گالیله نام دارد.

موفق باشید. شجاعی