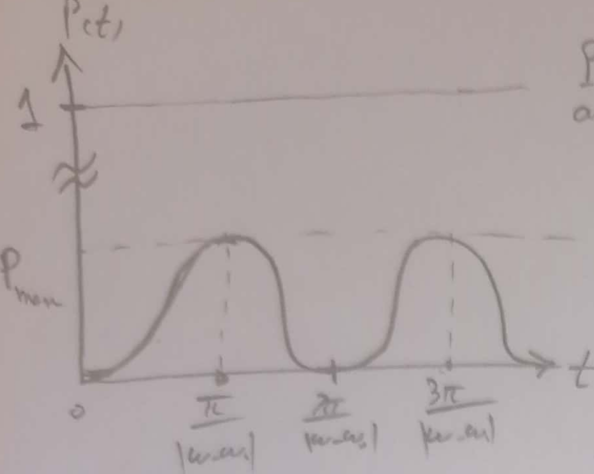
سؤال 1 تابعیت زمانی :

الف



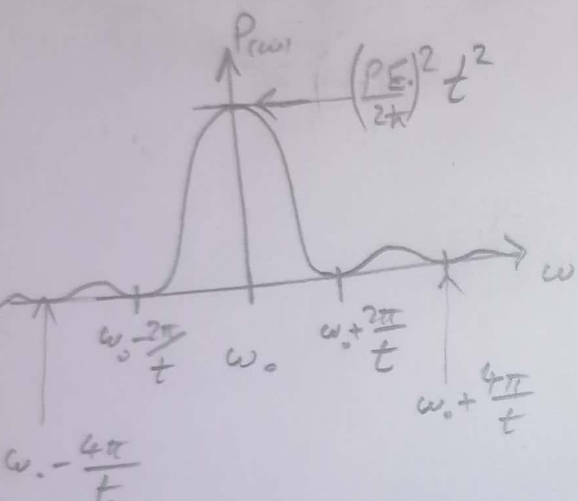
$$P_{a\to b}(t) = P_{max}\sin^2\left(\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)t\right)$$

شرط اختلالی بودن : $P_{max} = \left|\frac{pE_0}{\hbar(\omega-\omega_0)}\right|^2 \ll 1$

در قله های نمودار $\sin^2$ یعنی در لحظات $t = \frac{\pi}{|\omega-\omega_0|}$ و $\frac{3\pi}{|\omega-\omega_0|}$

بیشترین شانس برای یافتن سیستم در حالت برانگیخته داریم و برعکس در $t = \frac{2\pi}{|\omega-\omega_0|}$ و $\frac{4\pi}{|\omega-\omega_0|}$ رجوع به حالت اولیه

(هرچند این احتمال خیلی کمتر از ۱۰۰٪ یعنی $p = 1$ خواهد بود)



$$P_{a\to b}(\omega) = \left(\frac{pE_0}{2\hbar}\right)^2 t^2 \times \frac{\sin^2\left(\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)t\right)}{\left|\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)t\right|^2} \rightarrow \sin^2 c\,x$$ ب

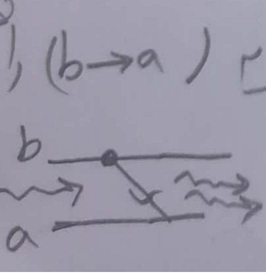
(همان تابع $\sin c^2$ را رسم کنیم)

فقط $\omega \simeq \omega_0$ شانس بالایی برای انجام گذار $a\to b$ دارد.

به عبارت دیگر باید بسامد نور تابشی با اختلاف انرژی دو تراز تنظیم شود : $\omega \simeq \frac{E_b - E_a}{\hbar}$

قله نمودار با زمان بلندتر و پهنای آن با زمان کم می شود. یعنی با گذشت زمان شانس نسبی تحریک با $\omega \simeq \omega$ زیادتر می شود. در شکل $P(t)$ هم دیدیم $\omega \simeq \omega_0$ با گذشت زمان رسیدن به بیشترین احتمال میل می کند. یعنی همواره $P_{a\to b}$ با زمان زیاد می شود. در مجموع وقتی ω را به ω_0 نزدیک کنیم، احتمال $P_{a\to b}$ به شدت زیاد می شود و این احتمال با زمان همواره زیاد می شود.

ج) اینکه تابش با فرکانس $\omega \simeq \omega_0$ احتمال گذار از حالت برانگیخته به حالت پایه ($b\to a$) را افزایش می دهد توصیف پدیده گسیل القایی است که مبنای کار لیزر است.



سوال ۲) الف) (مثال 11.3 کتاب را هم ببینید)

$$\gamma_n = i\int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \langle \psi_n | \vec{\nabla}_R \psi_n \rangle \, d\vec{R}$$

$$\vec{R} \to a \Rightarrow \gamma = i\int_{a_1=a}^{a_2=2a} \langle \psi_1(x) | \frac{\partial \psi_1}{\partial a} \rangle \, da$$

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{\pi x}{a} \Rightarrow \frac{d\psi_1}{da} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{a^{3/2}}}\sin\frac{\pi x}{a} + \sqrt{\frac{2}{a}} \times \left(\frac{-\pi x}{a^2}\right)\cos\frac{\pi x}{a}$$

$$\langle \psi_1 | \frac{\partial \psi_1}{\partial a} \rangle = \int_0^a dx \, \psi_1(x) \times \frac{\partial \psi_1}{\partial a} = \left(\frac{2}{a}\right)\int_0^a dx \left(\frac{-1}{2a}\sin^2\frac{\pi x}{a} - \frac{\pi}{a^2} x \underbrace{\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}}_{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{a}}\right)$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int_0^a dx\left(\frac{1-\cos\frac{2\pi x}{a}}{2}\right) + \frac{\pi}{a^3}\left(\left(\frac{a}{2\pi}\right)x\cos\frac{2\pi x}{a} - \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2\sin\frac{2\pi x}{a}\right) = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{2} - 0\right) + \frac{1}{2a^2}(a - 0) = 0$$

$$\gamma = \int 0 \, da = 0 \Rightarrow$$ تغییر فاز هندسی ندارد (وقتی تابع موج حقیقی است $\gamma = 0$ (زاویه

* بنا بر قضیه آدیاباتیک، چون تحول آهسته انجام شده است، سیستم همواره در حالت اولیه (پایه) خواهد ماند پس

*

$$E_{\text{قدیم}} = E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$E_{\text{جدید}} = E_1' = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m(2a)^2}$$

$$\boxed{\text{کار} = E_{\text{جدید}} - E_{\text{قدیم}} = -\frac{3}{8}\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}}$$

ب) تحول بسیار سریع انجام شده، پس تابع موج بلافاصله بعد از جابجایی دیوار همچنان $\psi_1(x)$ سیستم قبلی است:

$$\text{احتمال یافتن در } \psi_1' = |\langle \psi_1' | \psi_1 \rangle|^2 = \left|\left\langle \sqrt{\frac{2}{2a}}\sin\frac{\pi x}{2a} \middle| \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\right\rangle\right|^2$$

$$= \frac{2}{a^2}\left(\int_0^a dx \sin\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{\pi x}{a}\right)^2 = \frac{2}{a^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{2a}}{2\frac{\pi}{2a}} - \frac{\sin\frac{3\pi x}{2a}}{2\times\frac{3\pi}{2a}}\Bigg|_0^a\right)^2 = \frac{2}{a^2}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{a}} - \frac{-1}{\frac{3\pi}{a}}\right)^2$$

$$= \boxed{\frac{32}{9\pi^2}} \sim \frac{1}{3}$$

$$E_1' = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m(2a)^2} \Rightarrow \boxed{\text{کار} = -\frac{3}{8}\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}} \longrightarrow$$ (با احتمال حدوداً $\frac{1}{3}$)

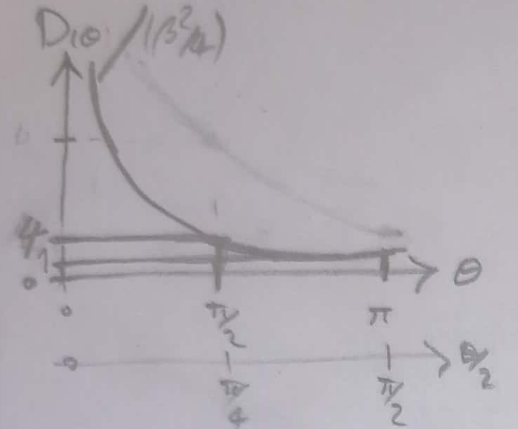
$$\text{احتمال یافتن } \psi_2' = |\langle \psi_2' | \psi_1 \rangle|^2 = \left|\left\langle \sqrt{\frac{2}{2a}}\sin\frac{2\pi x}{2a} \middle| \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\right\rangle\right|^2 = \frac{2}{a^2}\left(\int_0^a \sin^2\frac{\pi x}{a}\,dx\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$E_2' = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2m(2a)^2} \Rightarrow \boxed{\text{کار} = E_2' - E_1 = 0} \longrightarrow$$ (با احتمال $\frac{1}{2}$)

سؤال ۳

$$b=\beta\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\ ,\quad \frac{db}{d\theta}=\frac{\beta}{2}\frac{d}{d\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{\beta}{2}\times\frac{-\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}=\boxed{\frac{-\beta}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$D(\theta)=\frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|=\frac{\beta\cos\frac{\theta}{2}/\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\times\left|\frac{-\beta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right|=\boxed{\frac{\beta^2}{4}\times\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$



← در $\theta\to0$ خیلی زیاد می‌شود و در $\theta=\pi$ صفر نیست ←

⇐ اغلب ذرات α بدون انحراف قابل توجه عبور می‌کنند. ولی تعداد کمی هم کاملاً بازتاب می‌شوند $(\theta=\pi)$

لذا با شمردن نسبت ذرات که در $\theta\simeq\pi$ پراکنده شده‌اند در مقایسه با سایر زاویه‌ها، ابعاد هسته (پراکننده) خیلی کوچک‌تر از کل اتم است.

$$\sigma_{tot}=\int D(\theta)\,d\Omega=\frac{\beta^2}{4}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}\times\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\beta^2}{4}\times\int_0^{\pi}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\times2\pi$$

$$=\pi\beta^2\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\pi\beta^2\left(\int_0^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\pi}\right)\frac{\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sin^3\frac{\theta}{2}}$$

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\simeq\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^3}\,d\theta\to\infty$$

انتگرال در محدوده $0<\theta<\varepsilon$ همگرا به مقدار معین نمی‌شود

اینکه $\sigma_{tot}\to\infty$ یعنی هسته‌ها (پروتون‌ها) هر ذره α را پراکنده می‌کنند که البته با دوربرد بودن پتانسیل کولنی قابل انتظار است.

۴

سؤال ۴ الف) وقتی $\varepsilon=0$ باشد ماتریس قطری است:

$$H_0 = V_0\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 3 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

یک ویژه‌مقدار غیرتبهگن $E_2 = 3V_0$ متناظر با $\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ دارد.

سه ویژه‌مقدار تبهگن $E_1 = E_3 = E_4 = V_0$ متناظر با $\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ دارد.

ب) وقتی $\varepsilon \neq 0$ باشد:

برای یک حالت غیرتبهگن، تصحیح مرتبه اول انرژی را به کار می‌بریم:

$$E_2^1 = \langle \psi_2 | H' | \psi_2 \rangle$$

$$H' = V_0\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2' = (0\,1\,0\,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\,1\,0\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

یعنی E_2 تغییر نمی‌کند (البته می‌توان تصحیح مرتبه دوم $E_2^2 = \sum_{m \neq 2} \frac{|\langle \psi_m | H' | \psi_2 \rangle|^2}{E_2 - E_m}$ را به کار برد که سؤال نخواسته است)

برای سه حالت تبهگن، یک ماتریس 3×3 $W_{ij} = \langle \psi_i | H' | \psi_j \rangle$ را قطری کنیم تا تصحیح مرتبه اول انرژی به دست آید:

$$W_{11} = \langle \psi_1 | H' | \psi_1 \rangle = (1\,0\,0\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$W_{13} = \langle \psi_1 | H' | \psi_3 \rangle = (1\,0\,0\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = 0$$

$$W_{33} = \langle \psi_3 | H' | \psi_3 \rangle = (0\,0\,1\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = 0$$

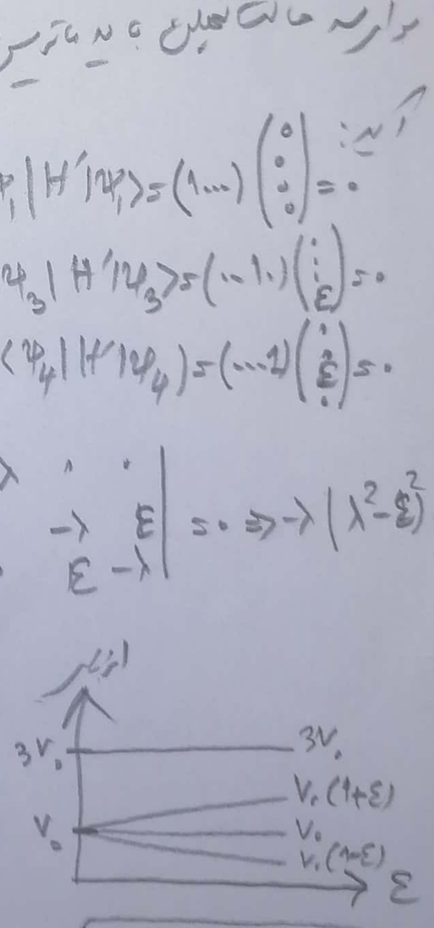
$$W_{14} = \langle \psi_1 | H' | \psi_4 \rangle = (1\,0\,0\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$W_{44} = \langle \psi_4 | H' | \psi_4 \rangle = (0\,0\,0\,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$W_{34} = \langle \psi_3 | H' | \psi_4 \rangle = (0\,0\,1\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon$$

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{13} & W_{14} \\ W_{31} & W_{33} & W_{34} \\ W_{41} & W_{43} & W_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda^2 - \varepsilon^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm\varepsilon \end{cases} \Longrightarrow E'_{1,3,4} = 0 \text{ و } \pm V_0\varepsilon$$



$$\begin{cases} E_1 = V_0 - V_0\varepsilon \\ E_2 = 3V_0 + 0 \\ E_3 = V_0 + 0 \\ E_4 = V_0 + V_0\varepsilon \end{cases}$$

$\boxed{\text{تبهگنی کلاً رفع می‌شود.}}$

سؤال ۵ (مثال ۴ فصل ۸ را ببینید): اگر مرز سمت راست (x_2) را در نظر بگیریم تابع موج در ناحیه کلاسیکی به شکل

$$A\sin\Big(\overbrace{\frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2}P_{(x')}\,dx'+\frac{\pi}{4}}^{\theta_1}\Big)$$

خواهد بود. اگر مرز سمت چپ (x_1) را در نظر بگیریم تابع موج ناحیه کلاسیکی

$$B\sin\Big(\overbrace{\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}P_{(x')}\,dx'+\frac{\pi}{4}}^{\theta_2}\Big)$$

است. برای اینکه این دو با هم معادل باشند، لازم است روابط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} A=B \ \text{و}\ \theta_1=\theta_2+n\pi \\ A=-B \ \text{و}\ \theta_1=-\theta_2+n\pi \end{cases}$$

. اولی منجر به نتیجه مطلوب نمی‌شود: $\int_x^{x_2}=\int_{x_1}^{x}$ که مفید نیست.

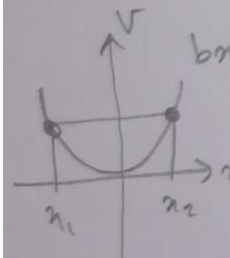
اما دومی رابطه مفیدی تولید می‌کند:

$$\theta_1=-\theta_2+n\pi \Rightarrow \frac{1}{\hbar}\int_x^{x_2}+\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x}-\frac{\pi}{4}+n\pi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\hbar}\left(\int_{x_1}^{x}+\int_x^{x_2}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+n\pi \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}P_{(x')}\,dx'=n\pi-\frac{\pi}{2} \quad \int_{x_1}^{x_2}P_{(x')}\,dx'=(n-\tfrac{1}{2})\pi\hbar}$$

این شرط مقادیر مجاز انرژی $E_n=\frac{P^2_{(x)}}{2m}+V(x)$ را معلوم می‌کند. تابع $P_{(x)}$ مشخص شود $\boxed{\psi_{(x)}=A\sin\left(\int_{x_1}^{x}+\frac{\pi}{4}\right)}$

ب) (مسئله شماره ۷ فصل ۸ را ببینید)



نقاط بازگشت: $E=V_{(x_1)}=V_{(x_2)}=bx_1^2=bx_2^2 \Rightarrow \boxed{-x_1=+x_2=\sqrt{\frac{E}{b}}}$

$$\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}P_{(x')}\,dx'=(n-\tfrac{1}{2})\pi \Rightarrow \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\int_{x_1=-\sqrt{E/b}}^{x_2=+\sqrt{E/b}}\sqrt{1-\frac{b}{E}x^2}\,dx=(n-\tfrac{1}{2})\pi$$

$$\sqrt{\frac{b}{E}}\,x=\sin\theta \Rightarrow \int_{-\sqrt{E/b}}^{\sqrt{E/b}}\sqrt{1-\frac{b}{E}x^2}\,dx=\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{b/E}}=\sqrt{\frac{E}{b}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{E}{b}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta=\sqrt{\frac{E}{b}}\left\{\frac{\theta}{2}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{\sin2\theta}{4}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right\}=\sqrt{\frac{E}{b}}\times\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\times\sqrt{\frac{E}{b}}\times\frac{\pi}{2}=(n-\tfrac{1}{2})\pi \Rightarrow \boxed{E_n=(n-\tfrac{1}{2})\hbar\sqrt{\frac{2b}{m}}} \quad n=1,2,3,\ldots$$

با قرار دادن $b=\frac{1}{2}m\omega^2$: $E_n=(n-\frac{1}{2})\hbar\omega$, $n\geq 1$ (نوسانگر هماهنگ)

سؤال ۶

انرژی

$$E \leq \langle H \rangle_\psi = \int_0^\infty \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - e\mathcal{E}x\right)\psi \, dx$$

میدان

$$\psi = Axe^{-\alpha x} \longrightarrow \frac{d\psi}{dx} = A(1-\alpha x)e^{-\alpha x} \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = A(-\alpha-\alpha+\alpha^2 x)e^{-\alpha x}$$

$$= \alpha A(\alpha x - 2)\, e^{-\alpha x}$$

$$\frac{\langle H\rangle_\psi}{|A|^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}(-2\alpha)\int_0^\infty x e^{-2\alpha x}dx - \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\int_0^\infty x^2 e^{-2\alpha x}dx - e\mathcal{E}\int_0^\infty x^3 e^{-2\alpha x}dx$$

$\hbar^2/8m\alpha$

$$= \left(\frac{\alpha\hbar^2}{m}\right)\left(\frac{1}{4\alpha^2}\right) - \left(\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\right)\left(\frac{-2}{(-2\alpha)^3}\right) - e\mathcal{E}\left(\frac{-3}{8\alpha^4}\right) = \cancel{\frac{\hbar^2}{4m\alpha} - \frac{\hbar^2}{8m\alpha^2}} + e\mathcal{E}\left(\frac{3}{8\alpha^4}\right)$$

$$|A|^2 = ? \quad |\psi|^2 = 1 = |A|^2\int_0^\infty x^2 e^{-2\alpha x} = |A|^2 \alpha\left(\frac{-2}{(-2\alpha)^3}\right) \Rightarrow \underline{|A|^2 = 4\alpha^3}$$

$$\boxed{E \leq \langle H\rangle_\psi = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} + e\mathcal{E}\left(\frac{3}{2\alpha}\right)}$$

انرژی

میدان

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0 = \frac{\hbar^2\alpha}{m} - \frac{3e\mathcal{E}}{2\alpha^2} \Rightarrow \boxed{\alpha^3 = \frac{3}{2}\frac{me\mathcal{E}}{\hbar^2}}$$

$$E \leq \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\times\frac{3}{2}\frac{me\mathcal{E}}{\hbar^2} + e\mathcal{E}\times\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\frac{\hbar^2}{me\mathcal{E}}\right)^{1/3} \times \left(\frac{9}{4}e\mathcal{E}\right) = \left(\frac{\hbar^2e^2\mathcal{E}^2}{m}\right)^{1/3} \times$$