معادلهٔ درجهٔ دو

محرم ایردموسی

پارسا هم‌کلاسی من بود. تو خوندن درس ریاضی اخلاق عجیبی داشت. به توصیه‌های هیچ‌کس هم گوش نمی‌داد. حتماً می‌پرسید رفتار عجیب پارسا چی بود.

پارسا هیچ فرمولی را حفظ نمی‌کرد. نه اینکه نخواد حفظ کنه. حفظ می‌کرد، اما دو دقیقه بعد، وقتی می‌پرسیدی فرمول فلان چی بود، کلی به خودش فشار می‌آورد و آخرش یک فرمول عجیباً غریباً تحویلت می‌داد که تو دکان هیچ عطاری پیدا نمی‌شد.

یک بار برای اینکه بهش انگیزه بدم، گفتم: «پارسا، تو آزمون سراسری که سؤال‌ها چهارجوابی‌اند و وقت زیادی نداری برای حل کردن، اون وقت می‌خوای چه‌کار کنی؟ یه فکری برای این بیماری **فرمول‌هراسی (فوبیا)** بکن تا دیر نشده.»

پارسا گفت: «چی‌چی؟ فرمول‌هراسی؟ نه داداش. من ترسی از فرمول ندارم. باید راهی پیدا کنم تا فرمول تو حافظه‌ام حک بشه؛ همین.»

راست می‌گفت. باید راهی پیدا می‌کرد تا فرمول‌ها تو حافظه‌اش مثل یک سنگ‌نوشته ماندگار بشن. از شما چه پنهان، ما هم این مشکل را داشتیم، اما به‌جای دو دقیقه ماندگاری فرمول در حافظهٔ پارسا، دو روز یا در نهایت ده روز حافظه‌مون مسئولیت قبول می‌کرد!

تا اینکه اون اتفاق افتاد و نه‌تنها پارسا، بلکه همهٔ ما تونستیم یک راه خوب برای حل این مشکل پیدا کنیم.

***

دقیقاً یادمه. روز شنبه بود و ما زنگ اول ریاضی داشتیم. قرار بود دبیر ریاضی‌مون، آقای **نیک‌گفتار**، فصل جدید رو شروع کنه که دربارهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم بود. من از خواهر بزرگ‌ترم شنیده بودم که برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم یک فرمول هست.

سر کلاس نشسته بودیم و منتظر ورود دبیر بودیم که یک جوان عینکی با موهای فرفری و ژولیده وارد کلاس شد. یک کوله هم داشت؛ مثل ما. همهٔ بچه‌ها جا خورده بودند و یک سؤال بزرگ تو ذهنشون جولان می‌داد: «این کیه؟!»

من اول فکر کردم شاگرد جدیده،

اما به قیافه‌اش می‌خورد که سنش از ما بیشتر باشه.

خلاصه تو این افکار غرق بودیم که تازه‌وارد معمای اول رو حل کرد: «سلام بچه‌ها، من **نوروش** هستم و امروز جای آقای نیک‌گفتار اومدم. ایشون کرونا گرفتند و به من گفتند که به‌جاشون بیام. البته نگران نباشید بیماری‌شون خفیفه و اگه چند روزی استراحت کنن، خوب می‌شن.»

حمید پرسید: «ببخشید امروز چه‌کار کنیم؟ چون معلم ما قرار بود فصل جدید رو درس بدن.»

تازه‌وارد کوله‌اش را گذاشت روی میز و گفت: «خب همون کار رو می‌کنیم. لطفاً یکی کتابش رو بده به من. کدوم فصل رو قرار بود کار کنید؟»

سعید که میز اول نشسته بود، کتابش رو به آقای نوروش داد و گفت: «آقا فصل ۴، معادله‌ها و نامعادله‌ها.»

تازه‌وارد عینکش را داد عقب و کتاب را ورق زد تا رسید به فصل ۴. زیر لب گفت: «بسیار خب. آها، معادلهٔ درجه دوم.» نگاه سریعی به مطالب فصل ۴ کرد و کتاب را داد به سعید. بعد رفت پای تخته و گچی برداشت تا چیزی بنویسه. بچه‌ها سریع طبق عادت همیشگی دفتر و دستکشون رو پهن کردند رو میز و آماده شدند تا جزوه‌شون رو سنگین و رنگین بنویسند. نوروش رو کرد به بچه‌ها و گفت: «به جای دفتر ریاضی، هر کدومتون یک برگهٔ چرکنویس بردارید و سؤال‌هایی رو که می‌دم حل کنید. کارم که تموم شد، می‌تونید جزوه‌تون رو هم بنویسید.»

بچه‌ها اخم‌هاشون رفت تو هم. عادت نداشتند به مسئله‌حل‌کردن. تازه‌وارد روی تختهٔ کلاس این سه تا عبارت رو نوشت و گفت: «بچه‌ها اول این سه تا عبارت رو ساده کنید:

$A=(x+3)(x+4)$

$B=(x-2)(x+2)$

$C=(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$ »

ساده کردن عبارت‌های جبری رو بلد بودیم. اولی اتحاد جملهٔ مشترک و جملهٔ غیرمشترک بود و به راحتی به جواب رسیدیم. دومی اتحاد مزدوج بود. هلو برو تو گلو! سومی با اینکه رادیکال داشت، اما مثل اولی حل می‌شد. آقای نوروش از بچه‌ها خواست که سه نفر بیایند و جواب را بنویسند. حمید و سعید و **وحید** رفتند پای تخته و راه‌حلشون رو نوشتند. راه‌حل هر سه درست بود:

$$A=(x+3)(x+4)=x^2+(3+4)x+3\times4=x^2+7x+12$$

$$B=(x-2)(x+2)=x^2-2^2=x^2-4$$

$$\begin{aligned}C&=(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})\\&=x^2+(-1+\sqrt{2}-1-\sqrt{2})x+(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})\\&=x^2-2x+((-1)^2-(\sqrt{2})^2)\\&=x^2-2x+(1-2)=x^2-2x-1\end{aligned}$$

آقای نوروش گفت: درسته، بفرمایید بشینید.»

بچه‌ها که نشستند، آقای نوروش تخته را پاک کرد و نوشت: $A=x^2+11x+28$ و گفت: «بچه‌ها حالا عکس کار قبلی را انجام بدید. یعنی این عبارت درجهٔ دوم رو به دو عبارت درجهٔ ۱ تجزیه کنید.»

بچه‌ها با این نوع مسئله‌ها آشنا بودند و می‌دونستند که باید به دنبال دو عدد باشند که حاصل جمعشون بشه ضریب x؛ یعنی ۱۱. حاصل‌ضربشون بشه مقدار ثابت عبارت درجهٔ دوم؛ یعنی ۲۸.

این یک کار ذهنی بود که پارسا توش از همه سریع‌تر بود. پارسا به ۵ ثانیه نرسیده، دستش رفت بالا. تازه‌وارد اشاره کرد که بره پای‌تخته و راه‌حلش رو بنویسه:

$$A=x^2+11x+28=(x+\bigcirc)(x+\square)=(x+4)(x+7)$$

$$\begin{cases}\bigcirc+\square=11\\ \bigcirc\times\square=28\end{cases}$$

آقای نوروش: «آفرین! درسته. بفرمایید.» بعد زیر راه‌حل پارسا، عبارت بعدی را نوشت و گفت: «حالا اینو چی می‌گین! $B=x^2+3x-154$»

توی لحنش یه‌جور مبارزه‌طلبی بود و انگار می‌خواست بهمون بفهمونه که خیلی هم به حافظه‌تون و توانایی حدس‌زدنتون ننازید. بچه‌ها غرق افکارشون بودند و معلوم بود که تیرهاشون یکی‌یکی به سنگ می‌خوره. پارسا دوباره دستش رفت بالا.

تازه‌وارد که معلوم بود تعجب کرده، به پارسا گفت: «مطمئنی جوابت درسته؟»

پارسا گفت: «بله آقا درسته، شک ندارم» و رفت

پای تخته و راه‌حلش رو نوشت:

$B=x^2+3x-154=(x+\bigcirc)(x+\square)$

$=(x-11)(x+14)$

$$\begin{cases}\bigcirc+\square=3\\ \bigcirc\times\square=-154\end{cases}$$

قبل از اینکه پارسا بشینه، آقای نوروش از پارسا پرسید: «از کجا فهمیدی یکی از دو عدد ○ و □ منفیه؟»

پارسا گفت: «چون ضربشون منفی بود.»

تازه‌وارد گفت: «درسته، اما ۱۱- و ۱۴ رو چطور حدس زدی؟»

پارسا گفت: «۱۵۴ زوجه. پس به ۲ می‌خوره. نوشتم: ۱۵۴=۲×۷۷، بعد دیدم به ۷ می‌خوره. نوشتم ۱۵۴=۲×۷×۱۱. بعد دیدم ۲×۷ می‌شه ۱۴ که از ۱۱ سه واحد بیشتره. فهمیدم دو عددی که می‌خواهیم ۱۴ و ۱۱- هستند.» آقای نوروش گفت: «آفرین! کاملاً درسته. بفرمایید بشینید.»

پارسا که نشست، آقای نوروش کارت بعدیش رو، رو کرد و گفت: «ببینم این رو کی حل می‌کنه: $C=z^2+2z-675$»

بچه‌ها درگیر چالش تازه‌وارد شده بودند و می‌خواستند نفر بعدی باشند که جلوی این معلم جوان عرض‌اندام می‌کنند. حتماً حمید و سعید و وحید خوش‌حال بودند که همون اول پای تخته رفتند. اما نه، اونا هم درگیر مسئله شده بودند.

چند دقیقه‌ای گذشت. همه نگاهشون به پارسا بود که نجاتشون بده. پارسا هم حسابی غرق در مسئله شده بود. به خودم گفتم: «دو تا عدد می‌خواهیم جمعشون بشه ۲ و ضربشون بشه ۶۷۵-. پس یکی مثبته و یکی منفی.»

به اینجا که رسیدم، دیگه متوقف شدم. آقای نوروش گفت: «بچه‌ها اگر خود عدد ۶۷۵ را به عامل‌های اول تجزیه کنید، شاید بتونید مسئله رو حل کنید. اما قبول دارید که این روش ممکنه ساعت‌ها وقتتون رو بگیره. مثلاً اگر عبارت $D=x^2+5x-20586$ را بدم، کی می‌تونه حدس بزنه دو عدد چی هستند؟ تازه تجزیه‌کردن ۲۰۵۸۶ هم وقت‌گیره.»

بچه‌ها منتظر بودند که معلم جوان دست بکنه توی کوله‌اش و یک فرمول جدید بیاره بیرون و بگه: «راه‌حل مشکل شما پیش منه!» اما آقای نوروش رفت پای‌تخته و گفت: «این مسئله در تاریخ به چند روش حل شده و شما در کتاب درسی با یکی از این روش‌ها آشنا خواهید شد. اما من قصد ندارم اون روش رو امروز بگم و به شما فرمول بدم!»

و ادامه داد: «برگردیم به مسئلهٔ خودمون: $C=z^2+2z-675$. دنبال دو عدد هستیم که مجموعشون برابر ۲+ می‌شه. بچه‌ها میانگین این دو عدد چقدر می‌شه؟»

بچه‌ها همه گفتند: «۱+». معلوم بود که میانگین دو عدد نصف مجموع آن‌هاست. معلم جوان ادامه داد: «من این دو عدد رو $1+a$ و $1-a$ می‌گیرم. چون اگر اولی از میانگین a واحد بیشتر باشه، دومی باید a واحد از ۱ کمتر باشه تا میانگین بشه یک. درسته؟»

استدلال آقای نوروش منطقی بود. معلم جوان ادامه داد: «حالا بیایید معلوماتمون رو برحسب $1+a$ و $1-a$ دوباره بنویسیم:

$$\begin{cases}(1+a)+(1-a)=2\\ (1+a)\times(1-a)=-675\end{cases}$$

تو تساوی دوم یک چیز آشنایی بود که داشت به من و احتمالاً بقیهٔ بچه‌ها چشمک می‌زد! شبیه اتحاد مزدوج بود. معلم جوان ادامه داد: «اگر a رو پیدا کنیم، مسئله حل می‌شه. پس از تساوی دوم ببینید a رو می‌تونید پیدا کنید.» بچه‌ها دست‌به‌کار شدند. من به راه‌حل رسیده بودم:

$$(1+a)(1-a)=-675\Rightarrow 1-a^2=-675$$

$$\Rightarrow 1+675=a^2\Rightarrow a^2=676$$

$$\Rightarrow a=\pm\sqrt{676}=\pm 26$$

دستم رو بردم بالا. هم‌زمان پارسا هم دستش رفت بالا. آقای نوروش به من اشاره کرد که برم پای تخته. راه‌حلم رو که نوشتم، آقای نوروش پرسید: «پس دو عددی که می‌خواستیم چه عددهایی هستند؟»

ذهنی حساب کردم و گفتم: «۲۷ و ۲۵-؛ یعنی همون $1+a$ و $1-a$.»

معلم جوان رو کرد به پارسا و گفت: «تو هم راهت همینه؟»

پارسا گفت: «بله آقا. منتها من آخر راه‌حلم نوشتم: $a=\sqrt{676}=26$.»

آقای نوروش گفت: «ایرادی نداره. در واقع ما اینجا به دنبال تمام مقدارهای a نیستیم؛ مثل بابلی‌ها!»

بچه‌ها انگار که اشتباه شنیده باشند، پرسیدند: «بابلی‌ها آقا؟ منظورتون دانش‌آموزان شهر بابله؟»

مسعود که اصالتاً مازندرانیه پرسید: «آقا شما تو بابل درس می‌دید؟» آقای نوروش خندید و گفت: «بابُلی‌ها نه بچه‌ها، بابِلی‌ها. قوم بابل پانصد سال قبل از میلاد در عراق زندگی می‌کردند.»

مسئله کم‌کم داشت جالب می‌شد. راه‌حلی که برای این مسئله یاد گرفته بودیم به هزاران سال قبل برمی‌گشت و انگار ما هم مثل اجدادمان فکر می‌کردیم.

آقای نوروش در تکمیل توضیح خود گفت: «در اون زمان عددهای منفی هنوز وارد ریاضیات نشده بودند و اگه اون‌ها با این مسئله روبه‌رو می‌شدند، همون راه‌حل پارسا رو می‌نوشتند. البته اشتباه هم نیست، چون ما اینجا اگه یه مقداری برای a پیدا کنیم، کفایت می‌کنه. حتی اگه به جای a، ۲۶- هم بذاریم، همون دو عدد قبلی به‌دست می‌یان.»

آقای نوروش گفت: «حالا با این روش که یاد گرفتید، برای پیدا کردن دو عدد، عبارت D رو که گفتم تجزیه کنید:

«$D=x^2+5x-20586$

بچه‌ها دست‌به‌قلم شدند. منم نوشتم:

$$\text{جمع}=5 \rightarrow \text{میانگین}=\frac{5}{2} \rightarrow (\frac{5}{2}+a)+(\frac{5}{2}-a)=5$$

$$(\frac{5}{2}+a)(\frac{5}{2}-a)=-20586 \Rightarrow 6/25-a^2=-20586$$

$$\Rightarrow a^2=20592/25 \Rightarrow a^2=\sqrt{20592/25}=143/5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2/5+143/5=146 \\ 2/5-143/5=-141 \end{cases}$$

رضا دست بلند کرد و با اشارهٔ آقای نوروش رفت پای تخته. راه‌حلش مثل راه‌حل من بود. آقای نوروش در توضیح راه‌حل رضا گفت: «بچه‌ها دقت کنید که هر عدد مثبتی به هر حال جذری داره و برای ما معلومه.»

آقای نوروش ادامه داد: «حال برای اینکه مطمئن بشم شما این روش رو یاد گرفتید، این عبارت رو تجزیه کنید تا بعد من ربط این تجزیه‌ها رو با معادلهٔ درجه دوم بگم. «$E=x^2-x-1$»

همه مشغول حل مسئله شدند. بردیا زودتر از همه حل کرد و با اشارهٔ معلم جوان رفت پای تخته و راه‌حلش رو نوشت:

$$\text{جمع}=-1 \Rightarrow \text{میانگین}=-\frac{1}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2}+a)(-\frac{1}{2}-a)=-1$$

$$(-\frac{1}{2})^2-a^2=-1 \Rightarrow a^2=\frac{5}{4} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{دو عدد}: -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$x^2-x-1=(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})$$

آقای نوروش گفت: «خوش‌حالم که تساوی آخر رو نوشتی. چون هدف ما تجزیه بود. همون‌طور که دیدید در این مثال آخر، دو عددی که دنبالش بودیم، رادیکالی شدند و معلومه که حدس این‌ها مشکل هست. اما با این روش بابلی‌ها ما تونستیم حدس‌زدن رو به یک روش جبری تبدیل کنیم و حالا هر عبارت درجه دومی به ما بدهند با این روش اون رو تجزیه می‌کنیم. اما حالا کی می‌تونه ارتباط این مثال‌ها را با معادلهٔ درجهٔ دومی مثل $x^2-6x-27=0$ بگه؟»

محمد اجازه خواست که جواب بده. با اشارهٔ معلم گفت: «آقا برای حل معادلهٔ درجه دوم کافیه با این روشی که گفتید تجزیه‌اش کنیم. بعد می‌گیم چون ضرب دو عبارت درجه یک شده صفر، پس یا اولی صفر می‌شه یا دومی و دو تا مقدار برای x به‌دست می‌یاد.» آقای نوروش گفت: «بد نیست همین معادلهٔ آخر رو شما بیایید حل کنید.» محمد رفت پای تخته و شروع به حل معادله کرد:

$$x^2-6x-27=0$$

$$(-3+a)(-3-a)=-27 \rightarrow 9-a^2=-27$$

$$\Rightarrow a^2=36 \Rightarrow a=6 \Rightarrow \text{دو عدد}: 3, -9$$

$$\Rightarrow x^2-6x-27=(x+3)(x-9)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \Rightarrow \boxed{x=-3} \\ \text{یا} \\ x-9=0 \Rightarrow \boxed{x=9} \end{cases}$$

معلم جوان، راه‌حل محمد را تأیید کرد و گفت: «بچه‌ها ممکنه معادلهٔ درجه دوم جواب نداشته باشه یا یک جواب داشته باشه؟» بچه‌ها کمی فکر کردند. پارسا گفت: «آقا ممکنه، مثل معادلهٔ $x^2+1=0$ که می‌دونیم جواب نداره.»

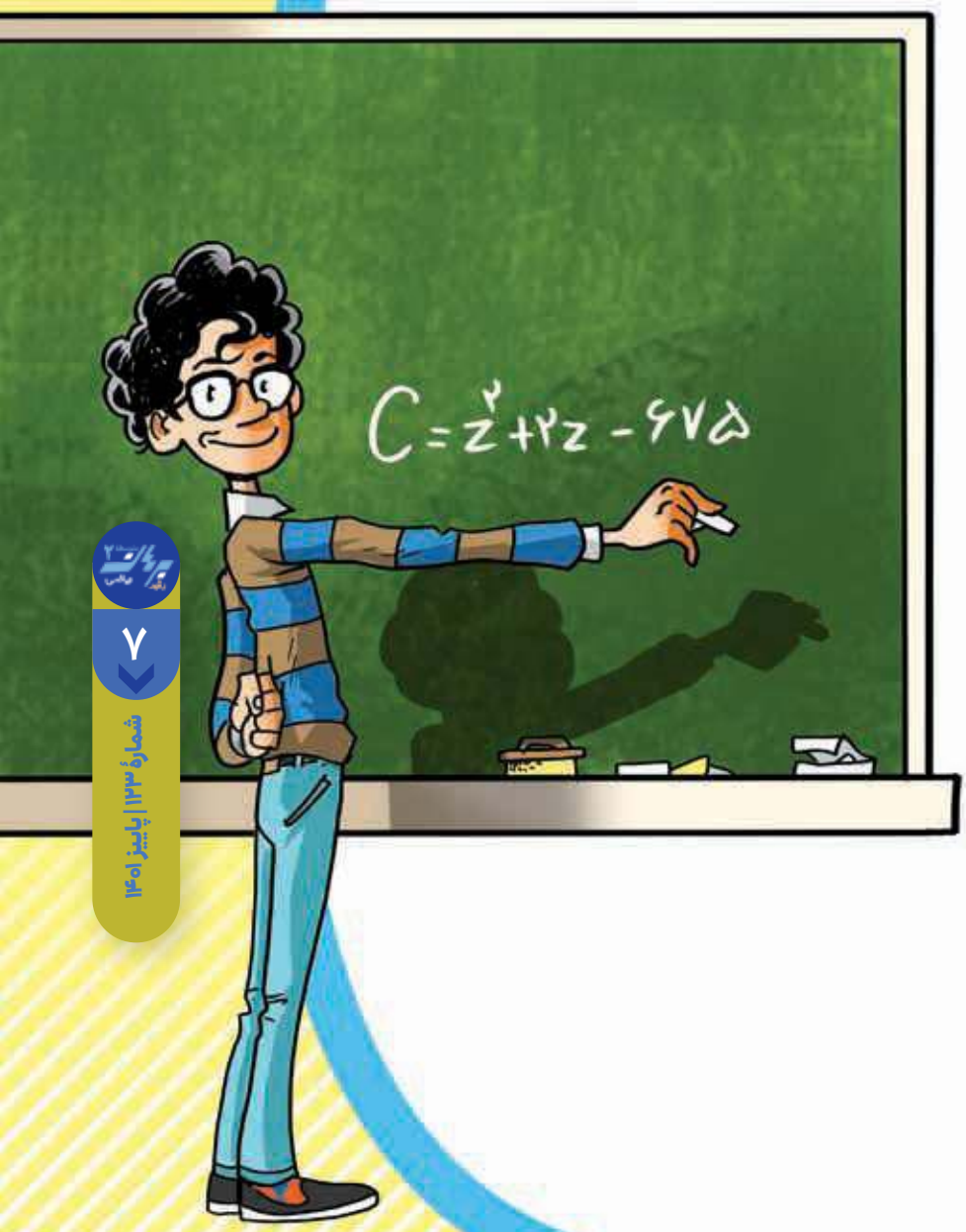
آقـــای نوروش گفت: «درســـته. این معادلـــه رو حل کنید: $x^۲+۲x+۵=۰$» حمید زودتـــر از همه حل کرد و رفت پای تخته و نوشت:

$$\text{جمع: ۲} \Rightarrow \text{میانگین} = ۱$$
$$\Rightarrow \text{دو عدد: } ۱+a, ۱-a$$
$$\Rightarrow (۱-a)(۱+a)=۵$$
$$\Rightarrow ۱-a^۲=۵ \Rightarrow a^۲=-۴ \Rightarrow$$ هیچ مقداری برای a وجود ندارد

در نتیجه معادله ریشه ندارد.

چند دقیقه به پایان کلاس مانده بود. آقای نوروش پرسید: «بچه‌ها اگر به شـــما معادلـــه‌ای مانند $۲x^۲-۵x-۷=۰$ بـــدن، اولین کاری که می‌کنید چیـــه تا بتونید با این روش حلـــش کنید؟» بچه‌ها با هم پاســـخ دادند: «طرفین معادله رو بر ۲ تقســـیم می‌کنیم.» آقای نـــوروش گفت: «بچه‌ها اگر معادله‌تون بـــه شـــکل $ax^۲+bx+c=۰$ باشـــه و a و b و c ســـه عدد معلوم باشـــند، چطوری حلش می‌کنید؟ درواقـــع می‌خواهیم یک‌بار برای همیشـــه معادلهٔ درجه دوم رو به‌طور کلی حل کنیم.»

پارسا دســـتش رو برد بالا. معلم گفت: «به این زودی حلش کردی؟» پارسا گفت: «نه آقا. ولی مطمئن هستم پای تخته حلش می‌کنم. کامل» آقای نوروش اشاره کرد که راه‌حلش رو بنویسه، پارسا این‌طور نوشت:



$$ax^۲+bx+c=۰ \Rightarrow x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰$$

$$\text{جمع: } \frac{b}{a} \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{b}{۲a} \Rightarrow \text{دو عدد: } \frac{b}{۲a}+t, \frac{b}{۲a}-t$$

$$\Rightarrow (\frac{b}{۲a}+t)(\frac{b}{۲a}-t)=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{b^۲}{۴a^۲}-t^۲=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow t^۲=\frac{b^۲}{۴a^۲}-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow t^۲=\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲} \Rightarrow t=\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

$$\Rightarrow ax^۲+bx+c$$
$$=(x+\frac{b}{۲a}+\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a})(x+\frac{b}{۲a}-\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a})=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \\ x=\frac{-b-\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \end{cases}$$

آقای نوروش گفت: «درسته کاملاً. بچه‌ها شما براســـاس این فرمول می‌تونید ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ رو مشـــخص کنید. امـــا اگر فرمول رو فرامـــوش کردید، از همین روشی که یاد گرفتید، می‌تونید معادله رو حل کنید.»

زنگ پایان کلاس به صدا درآمد. پارسا پای تخته داشت هنوز به راه‌حلش نگاه می‌کرد. به شوخی گفتم: «داداش حالا یک بار یک فرمول رو خـــودت به‌دســـت آوردی، دیگـــه این‌همه قیافه‌گرفتن نداره.» پارســـا، انگار که کشـــف بزرگی کرده باشه گفت: «بابک جان، حل شد.» گفتم: «درسته حل شد. فرمولش هم پیدا شد. من هم همین‌طوری حل کردم.» پارســـا گفت: «متوجه نیســـتی بابک‌جان. مشکل اصلی من حل شـــد. الان این فرمول تـــو ذهن من حک شـــده. چون خودم به این فرمول رســـیدم. هر وقت هم از یادم بره، می‌دونم چطور بازسازیش کنم. اصلاً نیاز نیســـت فرمول رو حفظ کنیم. باید روش رسیدن به فرمول رو بلد باشیم تا تو حافظه‌مون بمونه.»

راست می‌گفت. با روش آقای نوروش ما به جای فرمول، راه رسیدن به فرمول رو یاد گرفته بودیم و دیگـــه نگران فراموش‌کـــردن فرمول نبودیم. آقای نوروش از بچه‌ها خداحافظی کرد و رفت. جلسهٔ بعد آقای نیک‌گفتار آمد و روش دیگری (مربع کامل‌کـــردن) برای حل معادلهٔ درجه دوم گفت و از ما خواست دو روش حل، یعنی روش بابلی‌هـــا و روش مربع کامل‌کردن (منســـوب به خیام و همچنیـــن ریاضی‌دانان هندی) را با هم مقایســـه کنیم. به نظر شـــما چـــه مزیت‌هایی در هر روش وجود دارد که در دیگری وجود ندارد؟