# قفل‌ها برای بازنشدن هستند!

محرم ایرد موسی

مسئلهٔ زیر یکی از زیباترین مسئله‌هایی است که دربارهٔ شمارش، در اغلب کتاب‌های حل مسئله، مطرح می‌شود. سعی کنید آن را حل کنید.

**مسئلهٔ ۱ .** یازده نفر یک گاوصندوق دارند. آنها می‌خواهند گاوصندوق فقط زمانی باز شود که حداقل شش نفر از آنها حضور داشته باشند. تعداد حداقل قفل‌های گاوصندوق و حداقل کلیدهای هر فرد را بیابید.

اگر برای حل مسئله، ایده‌ای ندارید، سعی کنید ابتدا به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

**سؤال ۱ .** برای هر قفل چند کلید وجود دارد؟ آیا قفلی وجود دارد که تنها یک کلید از آن در دست یکی از افراد باشد؟ قفلی با ۲ کلید چطور؟ قفلی با ۳ کلید چطور؟ ...

اگر پاسخ شما شش کلید برای هر قفل باشد، پاسختان صحیح است. اگر از قفلی $k \leqslant ۵$ کلید در دست $k$ نفر از آن ۱۱ نفر باشد، در این‌صورت $۶ \leqslant ۱۱ - k$ نفر می‌توان یافت که کلید آن قفل را ندارند و اگر آن شش نفر حاضر شوند نمی‌توانند گاوصندوق را باز کنند. پس از هر قفل حداقل ۶ کلید باید ساخته شود.

**سؤال ۲ .** آیا قفلی با ۱۱ کلید وجود دارد؟! آیا قفلی با ۱۰، ۹، ۸ و یا ۷ کلید وجود دارد؟

به‌طور حتم به بخش اول سؤال ۲ پاسخ منفی داده‌اید چرا که چنین قفلی به هیچ دردی نمی‌خورد. با کمی تأمل درخواهید یافت که پاسخ بخش دوم نیز منفی است. فرض کنید قفل $X$ با $k \geqslant ۷$ کلید وجود دارد و $k$ کلید این قفل در دست افراد $P_۱$، $P_۲$، ...، $P_k$ باشد. بقیهٔ افراد را در نظر بگیرید. تعداد آنها حداکثر ۴ نفر است. اگر آنها حضور یابند قفل $X$ برای آنها باز نمی‌شود. اما حداقل یک قفل دیگر مانند $Y$ وجود دارد که برای آنها باز نمی‌شود. برای اثبات، یک گروه ۵ نفره شامل این افراد را در نظر بگیرید. طبق مفروضات مسئله قفلی مانند $Y$ برای این ۵ نفر وجود دارد که باز نمی‌شود و قفل $X$ برای این ۵ نفر باز می‌شود. در نتیجه با وجود قفل $Y$ می‌توان قفل $X$ را حذف کرد.
نتیجه‌ای که از دو سؤال فوق می‌توان گرفت بنویسید.

**سؤال ۳ .** اگر تعداد قفل‌ها برابر $M$ باشد، تعداد کل کلیدها و تعداد کلیدهای هر فرد را برحسب $M$ به‌دست آورید.

تا اینجا، می‌دانیم که برای هر قفل، ۶ کلید وجود دارد که به ۶ نفر از آن ۱۱ نفر داده شده است و پنج نفر کلید آن قفل را ندارند. برای هر قفل مانند $X$، زیرمجموعهٔ پنج‌عضوی از افراد که کلید $X$ را ندارند با $f(X)$ نمایش می‌دهیم.

**سؤال ۴ .** دو زیرمجموعهٔ متمایز پنج‌عضوی از افراد مانند $A$ و $B$ را در نظر بگیرید. دقت کنید که $A \neq B$ اما ممکن است $A \cap B \neq \varnothing$. اگر اعضای $A$ حاضر شوند گاوصندوق باز نمی‌شود یعنی قفلی وجود دارد که برای آنها باز نمی‌شود. این قفل را با $g(A)$ نمایش دهید. آیا ممکن است که برای اعضای $A$ بیش از یک قفل باز نشود؟ آیا ممکن است که هم برای اعضای $A$ و هم برای اعضای $B$، یک قفل مشترک وجود داشته باشد که باز نشود؟ (درواقع $g(A) = g(B)$.)

مطمئن هستم که پاسختان به این سؤال صحیح است. وجود ۲ قفل بازنشده برای گروه $A$ هیچ فرقی با یک قفل بازنشده ندارد و چون ما به دنبال حداقل تعداد قفل‌ها هستیم پس می‌توان فرض کرد که برای هر گروه پنج نفره دقیقاً یک قفل وجود دارد که باز نمی‌شود و این یعنی اینکه $g$ یک تابع است از مجموعه زیرمجموعه‌های ۵ عضوی افراد به مجموعهٔ قفل‌ها. پاسخ بخش دوم سؤال هم منفی است. چرا که در این‌صورت با آمدن اعضای $A \cup B$ که حداقل ۶ نفر هستند قفل مشترک باز نمی‌شود و این با مفروضات مسئله تناقض دارد. پاسخ منفی به سؤال ۴ به این معنی است که $g$ یک تابع یک‌به‌یک است.

حال همه چیز مهیاست تا تعداد قفل‌ها را تعیین کنید.

سؤال‌ها و پاسخ آنها را مرور می‌کنیم. متناظر با هر قفل یک زیرمجموعهٔ پنج‌عضوی از افراد وجود دارد که آن قفل برای آنها باز نمی‌شود و این تناظر یک‌به‌یک است. پس تعداد قفل‌ها برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های پنج‌عضوی از افراد؛ یعنی برابر است با $\binom{۱۱}{۵}$.

اگر مطابق با پاسخ سؤال ۳، تعداد کلیدهای هر فرد را محاسبه کنیم به عدد

$$N = \frac{\binom{۱۱}{۵}}{۱۱} = ۲۵۲$$

می‌رسیم که برابر است با $\binom{۱۰}{۵}$.

**سؤال ۵ .** با توجه به پاسخ به‌دست آمده برای تعداد کلیدهای هر فرد، روشی دیگر برای یافتن تعداد کلیدهای هر فرد دست‌وپا کنید. پاسخ $\binom{۱۰}{۵}$ خود می‌تواند راهنما باشد.

پاسخ شما: شخص $P$ را در نظر می‌گیرم و کلید $k$ که متعلق به $P$ است. کلید $k$ متعلق به قفل $L$ است و قفل $L$ متناظر است با ...

$$(*)\ P \text{ شخص } \rightarrow k \text{ کلید } \rightarrow L \text{ قفل } \longleftrightarrow \cdots$$

۲۵۲ کلید برای هر نفر و ۴۶۲ قفل برای گاوصندوق!

حتماً متوجه شدید که عملاً این تعداد قفل و کلید امکان‌پذیر نیست و در دنیای امروز، مسئله پاسخ عملی ساده‌تری دارد. به‌عنوان مثال می‌توان از سیستم‌های رمزنگاری استفاده کرد. برگردیم سر مسئلهٔ خودمان.

**مسئلهٔ ۲ .** تعداد کلیدهای مشترک بین دو نفر از این یازده نفر چقدر است؟

راهنمایی. دو نفر از این یازده نفر مانند $P_۱$ و $P_۲$ را در نظر بگیرید و فرض کنید کلید $k$ بین آنها مشترک باشد. شکلی مانند * رسم کنید و سعی کنید هر کلید را به یک قفل و هر قفل را به ....... نسبت دهید.

اگر به عدد $\binom{۹}{۵}$ رسیده‌اید، پاسختان صحیح است. هر کلید مشترک مانند $k$ مربوط به قفلی مانند $L$ است و قفل $L$ متناظر با یک دستهٔ پنج نفره از میان بقیهٔ افراد است که ۹ نفر هستند. از طرفی متناظر با هر پنج نفر از میان بقیه قفلی هست که باز نمی‌شود. کلید این قفل دست ۶ نفر دیگر است. پس $P_۱$ و $P_۲$ کلید آن قفل را دارند. پس تعداد کلیدهای مشترک $P_۱$ و $P_۲$ برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های پنج‌تایی از ۹ نفر دیگر، یعنی $\binom{۹}{۵}$.

**مسئلهٔ ۳ .** تعداد کلیدهای مشترک بین $r$ نفر از این یازده نفر را بیابید اگر $۲ \leqslant r \leqslant ۶$.

**مسئلهٔ ۴ .** می‌دانیم برای هر پنج نفر، دقیقاً یک قفل وجود دارد که باز نمی‌شود. برای یک گروه ۴ نفره چند قفل باز نمی‌شود؟ برای یک گروه ۳ نفره چطور؟ برای یک گروه ۲ نفره و در نهایت برای یک نفر چطور؟

راهنمایی. شکلی مانند * رسم کنید و از تناظر یک‌به‌یک بین قفل‌ها و زیرمجموعه‌های ۵ نفره استفاده کنید.

$$A = \{P_۱, P_۲, P_۳, P_۴\} \rightarrow \text{قفل } L \text{ که برای } A \text{ باز نمی‌شود} \longleftrightarrow \cdots$$

**راه‌حل.** هر قفل $L$ که برای دستهٔ ۴ نفره‌ای مانند $A$ باز نشود متناظر است با یک دستهٔ پنج‌تایی مانند $B$ با این شرط که $A \subseteq B$. پس تعداد قفل‌هایی که برای $A$ باز نمی‌شوند برابر است با تعداد دسته‌هایی که شامل اعضای $A$ هستند. یعنی برابر است با $\binom{۷}{۱}$. با همین روش تعداد قفل‌هایی که برای یک گروه ۳ نفره باز نمی‌شوند برابر است با $\binom{۸}{۲}$ و تعداد قفل‌هایی که برای یک گروه ۲ نفره باز نمی‌شوند برابر است با $\binom{۹}{۳}$. تعداد قفل‌هایی که برای یک نفر خاص باز نمی‌شود برابر است با $\binom{۱۰}{۴}$. ∎

**سؤال ۶ .** با توجه به تعداد کلیدهای مشترک بین هر ۲ نفر، هر ۳ نفر، هر ۴ نفر و هر ۵ نفر، راه‌حل دیگری برای مسئلهٔ ۴، دست‌وپا کنید.

راهنمایی. از اصل شمول و عدم‌شمول استفاده کنید.

در مسئلهٔ ۱، یازده نفر شرایط یکسانی داشتند و برای همین، تعداد کلیدهای آنها با هم برابر بود. حال اگر تقارن موجود بین افراد را بر هم بزنیم مسئله‌هایی جالب‌تر خواهیم داشت. مسئله‌های ۵ و ۶ از این نوع هستند.

**مسئلهٔ ۵ .** فرض کنید یکی از یازده نفری که در مسئله ۱، دربارهٔ آنها و گاوصندوقشان صحبت کردیم، رییس باشد. و رییس این حق را دارد که در حضور او، آمدن حداقل ۴ نفر از ده نفر دیگر، برای بازشدن گاوصندوق کافی است و در غیاب او، آمدن حداقل ۶ نفر برای بازشدن گاوصندوق الزامی است. با این شرایط تعداد حداقل قفل‌ها و حداقل تعداد کلیدهای هر فرد را به‌دست آورید.

**مسئلهٔ ۶ .** پنج نفر از شرکت $A$ و پنج نفر از شرکت $B$، مشترکاً یک گاوصندوق دارند. گاوصندوق فقط زمانی باز می‌شود که از هر شرکت حداقل ۳ نفر حضور داشته باشند. تعداد حداقل قفل‌ها و تعداد حداقل کلیدهای هر فرد را به‌دست آورید.

برای حل این مسئله، مشابه مسئلهٔ ۱، به این نکته توجه کنید که هر قفل گاوصندوق برای چه زیرمجموعه‌ای از افراد باز نمی‌شود. درواقع زیرمجموعه‌هایی از افراد را تعیین کنید که نمی‌توانند گاوصندوق را بازکنند. سعی کنید بین قفل‌ها و زیرمجموعه‌های مجموعه افراد ارتباط ایجاد کنید.

پس از حل این دو مسئله پیشنهاد می‌کنیم به سراغ مسئله‌هایی مشابه مسئله‌های ۲، ۳ و ۴ برای این دو مسئله بروید و سعی کنید آنها را هم حل کنید. اگر علاقه‌مند شده‌اید و از مسئلهٔ گاوصندوق دل نمی‌کنید می‌توانید خودتان مطابق میلتان مسئله‌های مشابهی بسازید و سپس آنها را حل کنید. (سرو کنید!)

یک جملهٔ کلیدی برای حل این نوع از مسئله‌ها این است که «قفل‌ها برای بازنشدن هستند.»

در بخش دوم این مقاله که در شمارهٔ آینده خواهد آمد، علاوه بر راه‌حل مسئله‌های ۵ و ۶، یک الگوریتم کلی برای حل این‌جور از مسئله‌ها با استفاده از مجموعه‌ها ارائه خواهیم کرد.