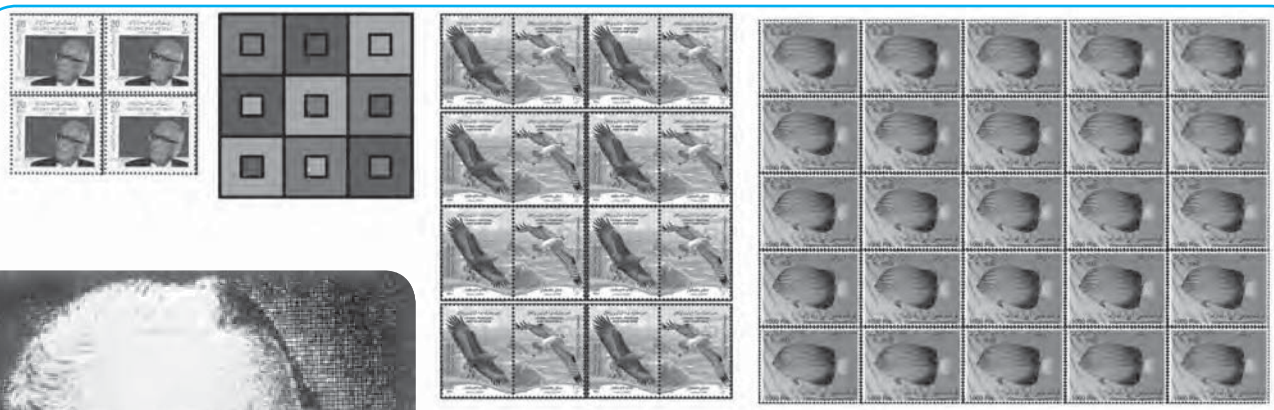
خلاقیت

مسئله‌های تاریخی ریاضیات

دکتر محرم نژادایردموسی
عضو هیأت علمی دانشگاه شریف



شکل ۱

لاتین مربع

در سال ۱۷۷۹، ریاضی‌دان معروف سوئیسی، لئونارد اویلر مسئله زیر را که به مسئله ۳۶ افسر معروف است مطرح کرد:

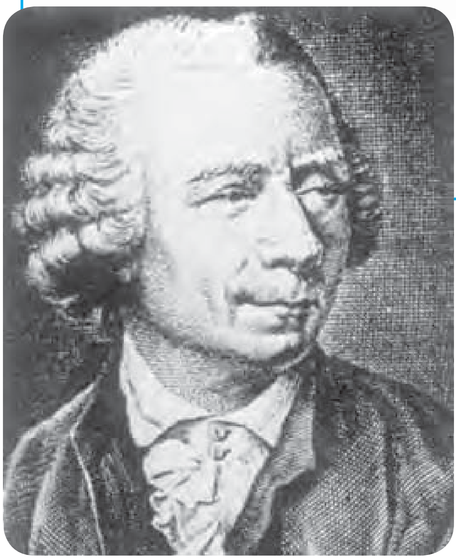
مسئله ۱ ۳۶ افسر از شش هنگ مختلف در جلسه‌ای گرد آمده‌اند. از هر هنگ شش افسر که درجه‌های مختلفی دارند حضور دارند. در این جلسه، شش ردیف شش تایی صندلی چیده شده است. آیا می‌توان این افسران را طوری روی صندلی‌ها نشاند که در هر ردیف افقی و همین‌طور در هر ردیف عمودی، از هر هنگ و از هر درجه یک نفر نشسته نباشند؟ به عبارت دیگر هیچ دو نفری از یک هنگ و هیچ دو نفری با یک درجه در یک سطر یا ستون نشسته باشند؟

اویلر به درستی دریافته بود که چنین آرایشی وجود ندارد اما نتوانست حدس خود را ثابت کند. امروزه حدس اویلر ثابت شده است و به خاطر ارائه این مسئله، او را نخستین ریاضی‌دانی می‌دانند که **مربع لاتین** را به دنیای ریاضیات وارد کرده است.

قبل از پرداختن به تعریف دقیق مربع لاتین، به دو مسئله زیر توجه کنید:

مسئله ۲ $2n$ تیم در یک لیگ ورزشی با هم رقابت می‌کنند و هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم مسابقه می‌دهند. می‌خواهیم در $2n-1$ مرحله، جدول بازی‌ها را با شرایط خواسته شده تنظیم کنید.

مسئله ۳ دو تیم چهار نفره از دو مدرسه‌ی ادب و دانش قرار است با هم مسابقه دهند. هر بازیکن از تیم ادب دقیقاً یک بار با هر بازیکن تیم دانش مسابقه می‌دهد (۱۶ بازی). می‌خواهیم در چهار مرحله جدول بازی‌ها را تنظیم کنیم به طوری که در هر مرحله ۴ بازی بین دو تیم انجام شود. جدول بازی‌ها را تنظیم کنید.



اکنون سعی کنید به وجه مشترک این مسئله‌ها فکر کنید. همین‌طور به سادگی و سختی آن‌ها. کدام یک ساده‌تر است؟ و کدام یک از همه سخت‌تر است؟ حدس‌تان درست است. مسئله ۳ را شاید راحت‌تر از دوتای دیگر بتوان حل کرد (مطمئن هستم که برنامه بازی‌ها را هم نوشته‌اید!) و مسئله ۱ از بقیه سخت‌تر است چرا که ریاضی‌دانی مانند اویلر هم نتوانسته بود آن را حل کند.

بیایید به سراغ وجه ریاضی مسئله‌ها برویم و با مدل‌سازی مسئله آشنا شویم. به تعریف زیر دقت کنید.

تعریف ۱. یک مربع لاتین از مرتبه‌ی n، یک آرایه (جدول) $n\times n$ است که در آن هر سطر و هر ستون جایگشتی از اعضای یک مجموعه n عضوی است، یعنی در هر سطر و در هر ستون، هر عضو مجموعه دقیقاً یک بار ظاهر شده است.

مثال ۱ درابتدای مقاله(شکل ۱)، نمونه‌ای از مربع‌های لاتین از مرتبه‌های کوچک‌تر از ۶ را مشاهده می‌کنید.

مثال ۲ چند مربع لاتین از مرتبه ۲ روی مجموعه $\{۱,۲\}$ و چند مربع لاتین از مرتبه ۳ روی مجموعه $\{۱,۲,۳\}$ می‌توان تعریف کرد؟

از این به بعد، برای راحتی بحث، مجموعه n عضوی مورد اشاره در تعریف را همان مجموعه $\{۱,۲,...,n\}$ که با نماد $[n]$

نمایش داده می‌شود، در نظر می‌گیریم.

مفهوم مربع لاتین ابتدا در طرح‌های آماری مورد استفاده قرار گرفتند و سپس کاربردهایی در شاخه‌های مختلفی از جبر و ریاضیات گسسته پیدا کردند. در مسئله ۳، یک مربع لاتین از مرتبه ۴ پاسخ مسئله را روشن می‌کند (چگونه؟) در مسئله ۲، به دنبال یک مربع لاتین از مرتبه $2n$ مانند M باشید که روی قطر اصلی آن تنها عدد $2n$ آمده باشد $(m_{ii}=2n)$ و مربع مذکور نسبت به قطر اصلی متقارن باشد یعنی عدد نوشته شده در سطر i ام ستون j ام با عدد نوشته شده در سطر j ام و ستون i ام برابر باشد $(m_{ij}=m_{ji})$. آیا در میان مربعات لاتین مثال ۱ چنین مربعاتی وجود دارد؟ در حالت کلی چه‌طور؟ آیا مربع لاتینی از مرتبه $2n$ با شرایط مذکور وجود دارد؟ تنظیم جدول بازی‌ها به کمک این مربع لاتین را به عهده خودتان می‌گذارم. در مسئله ۱، چگونه می‌توان از مفهوم مربع لاتین استفاده کرد؟ و صورت‌بندی مسئله چه خواهد بود؟ اجازه بدهید به جای ۳۶ افسر، ۹ افسر از ۳ هنگ و با ۳ درجه متفاوت در نظر بگیریم که می‌خواهیم روی ۹ صندلی (سه ردیف سه تایی) آن‌ها را جای دهیم. اگر هنگ‌ها را با حروف a، b و c و درجه‌ها را با اعداد ۱ تا ۳ نشان دهیم، یک پاسخ مطلوب مسئله چه آرایه‌ای از حروف و اعداد خواهد بود؟ و چه ارتباطی به مربع لاتین پیدا می‌کند؟ در واقع اگر پاسخ مسئله را که یک جدول 3×3 است، پیدا کرده باشیم، با حذف درجه افراد یک مربع لاتین از مرتبه سه ظاهر می‌شود که در آن حروف a، b و c ظاهر شده‌اند و با حذف هنگ افراد، یک مربع لاتین از مرتبه سه ظاهر می‌شود که در آن اعداد ۱ تا ۳ به کار رفته‌اند. دو مربع لاتین که آن‌ها را L_1 و L_2 می‌نامیم. آیا هر دو مربع لاتین مرتبه ۳ که روی دو مجموعه $\{a,b,c\}$ و $\{1,2,3\}$ ساخته شوند در کنار هم یک پاسخ مسئله را تشکیل می‌دهند؟ به عنوان مثال کدام یک از دو حالت زیر پاسخ مسئله هستند؟

$$\begin{bmatrix} 1a & 2b & 3c \\ 3c & 1a & 2b \\ 2b & 3c & 1a \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1a & 2c & 3b \\ 3c & 1b & 2a \\ 2b & 3a & 1c \end{bmatrix}$$

پاسختان به این پرسش هم صحیح است. جدول سمت راست پاسخ مسئله ۱ است چرا که از هر هنگ a، b و c، سه افسر با درجه‌های متفاوت وجود دارد، در حالی که در جدول سمت چپ سه افسر هنگ a همه از درجه ۱ هستند و همین‌طور دو هنگ دیگر. بنابراین دو مربع لاتین از مرتبه سه، در صورتی یک پاسخ مسئله ۱ را تولید می‌کنند که ۹ زوج مرتب حاصل از الحاق آن دو به هم، همگی متفاوت باشند. در این حالت با دو مربع لاتین متعامد سر و کار خواهیم داشت که در زیر تعریف آن را می‌بینید.

تعریف ۲. (۱) اگر $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ دو مربع لاتین از مرتبه n باشند، آن‌گاه الحاق A و B که آن را با (A,B) نمایش می‌دهیم یک آرایه $n\times n$ است که در سطر i ام و ستون j ام و زاویه آن زوج مرتب (a_{ij},b_{ij}) قرار دارد.

(۲) دو مربع لاتین A و B از مرتبه n را متعامد می‌نامیم هرگاه تمامی زوج‌های ظاهر شده در (A,B) دو به دو متمایز باشند (هیچ دو زوجی یکسان نباشند).

مثال ۳ دو مربع لاتین L_1 و L_2 متعامدند اما دو مربع لاتین L_2 و L_3 متعامد نیستند. درباره‌ی دو مربع L_1 و L_3 چه می‌توان گفت؟

$$L_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ L_2=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$L_3=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال ۴. سعی کنید سه مربع لاتین مرتبه ۴ پیدا کنید که دو به دو متعامد باشند. چنین سه مربعی وجود دارند. به مسئله ۳۶ افسر اویلر برگردیم. در واقع در این مسئله به دنبال دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ هستیم که اویلر عدم وجود آن‌ها را حدس زده بود. اما اولین اثبات برای این مسئله در سال ۱۹۰۰ توسط ریاضی‌دانی به نام G.Tarry ارائه شد و بعدها اثبات‌های کوتاه‌تر و بهتری ارائه شد. درباره‌ی وجود مربعات لاتین متعامد از مرتبه‌های دیگر چه می‌توان گفت؟ از مرتبه دو تنها ۲ مربع لاتین وجود دارد که متعامد هم نیستند.

مثال ۵ سعی کنید دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۴ و ۵ پیدا کنید.

اویلر حدس زده بود که برای nهای زوج که مضرب ۴ نیستند، پاسخ منفی است. اما در سال ۱۹۶۰، سه ریاضی‌دان (R.C.Rose, S.S.Shikhande, E.Parker) در نشریه ریاضی کانادا اثبات کردند که جفت مربع‌های لاتین متعامد برای همه مقادیر طبیعی n به جز دو و شش وجود دارند.

اما داستان مربعات لاتین به این جا ختم نمی‌شوند و خواننده علاقمند را به مطالعه کتاب [۱] دعوت می‌کنم. در پایان چند مسئله ارائه می‌شود تا با حل آن‌ها توانایی خود را محک بزنید.

مسئله ۴ به کمک ۲ مربع لاتین متعامد از مرتبه ۴ که در مثال ۴ پیدا کرده‌اید (امیدوارم!) مسئله زیر را حل کنید: در مسئله ۳ فرض کنید مسابقات در چهار سالن مختلف برگزار می‌شوند. جدول بازی‌ها را طوری تنظیم کنید که هر بازیکن یک بار در هر یک از چهار سالن بازی داشته باشد.

مسئله ۵ به کمک ۳ مربع لاتین متعامد (دو به دو) که در مثال ۴ پیدا کرده‌اید مسئله زیر را حل کنید:

در مسئله۴ فرض کنید علاوه بر ۴ سالن، از ۴ داور نیز برای داوری مسابقات دعوت کرده باشیم. می‌خواهیم برنامه داوری‌ها به گونه‌ای تنظیم شود که هر بازیکن در ۴ مسابقه‌ای که می‌دهد ۴ داور متفاوت را تجربه کند (تا عدالت رعایت شود!) برنامه بازی‌ها و

منابع

[۱] سیمین اکبری زاده، مربع لاتین ومربع وفقی، انتشارات مدرسه.

[۲] ایان اندلسن، نخستین درس در ریاضیات گسسته، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.

چینش داوران با شما!

مسئله۶ خبر می‌رسد که داوران نیز می‌خواهند ۴ بازی که داوری می‌کنند در سالن‌های مختلف باشد، اگر راهی برای انجام این خواسته آنان وجود دارد بگویید.

مسئله۷ مربع لاتینی زیر را که تنها دو سطر آن پر شده است تکمیل کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

مسئله۸ تا به حال جدول سودوکو دیده‌اید، یا حل کرده‌اید. چه ارتباطی بین جدول سودوکو و مربع لاتین وجود دارد؟

سرگرمی ۲

هوشنگ شرقی

معمای استقلالی‌ها و پرسپولیسی‌ها

در یک دریای ناشناخته دو جزیره در نزدیکی هم وجود داشتند. اسامی این دو جزیره هم مثل داستان آن‌ها عجیب بود: جزیره‌ی استقلال و جزیره‌ی پرسپولیس! (این اسامی هیچ ارتباطی با اسامی دو باشگاه ورزشی معروف در یک شهر معروف ندارد!) اهالی این دو جزیره هم مثل اسامی آن‌ها عجیب و غریب بودند. آن‌ها که جایی جز جزیره‌ی همسایه نمی‌شناختند، گه‌گاه به آن‌جا مسافرت می‌کردند و عجیب آن که هر شهروند هر یک از دو جزیره هر وقت در جزیره‌ی خودش بود تمام باورها و گمان‌هایش دقیق و درست بود و هرگاه به جزیره‌ی همسایه مسافرت می‌کرد، در آن‌جا تمام باورهایش نادرست بود! حالا به چند معمای جالب درباره‌ی اهالی این دو جزیره توجه کنید و تلاش کنید راه حل آن‌ها را بیابید.

معمای اوّل:

یک بار شهروندی از یکی از این دو جزیره گمان می‌کرد که او یک استقلالی است که حالا در جزیره‌ی پرسپولیس است. او استقلالی بود یا پرسپولیسی؟ و او در آن وقت در کدام جزیره بود؟!

معمای دوّم:

ازدواج بین مردان و زنان پرسپولیسی و استقلالی رایج بود! یعنی محدودیتی در ازدواج ساکنان دو جزیره‌ی مختلف وجود نداشت. یک بار از سالار که ساکن یکی از دو جزیره بود پرسیدند:

تو استقلالی هستی یا پرسپولیسی؟ و او جواب داد: «من استقلالی هستم» و همسرتان چطور؟ و او پاسخ داد: «آه، همسرم و من هر دو پرسپولیسی هستیم!»

سالار استقلالی است یا پرسپولیسی؟ و همسرش چطور؟ و این اتفاق در کدام جزیره افتاده بود؟

معمای سوّم:

سرور و پیروز یک زن و شوهر بودند که یکی استقلالی و دیگری پرسپولیسی است! در یک زمان پیروز گمان می‌کرد که او و همسرش در دو جزیره‌ی مختلف هستند، امّا در همان زمان سرور گمان می‌کرد که آن‌ها در یک جزیره هستند. کدام یک درست فکر می‌کرد؟

معمای چهارم:

یک بار مردی با همسرش که در جزیره‌ی دیگری بود، با تلفن همراه خود صحبت می‌کرد و به او گفت: «ما هر دو استقلالی هستیم» و همسرش گفت: «نه این طور نیست!» کدام یک از آن دو در آن زمان در جزیره‌ی استقلال بود؟

معمای پنجم:

کدام گزاره (جمله‌ی خبری) است که می‌تواند توسط هر یک از شهروندان دو جزیره، صرف‌نظر از آن که در جزیره‌ی خودشان باشند یا در جزیره‌ی دیگر، در یک زمان بیان شده و به آن معتقد باشد؟

پاسخ در صفحه ۵۸