کوشیار، سال اول، شمارهٔ ۳، صص ۱۵٦ ـ ۱٦۲

دنبالهٔ فیبوناچی و دنبالهٔ لوکاس

محرم ایردموسی

مقدمه

لئوناردو فیبوناچی، ریاضیدان ایتالیایی،در سال ۱۲۰۲،دنبال اعداد $\{F_n\}$ را به صورت زیر تعریف کرد :

$$F_\circ = \circ \ , \ F_1 = 1 \ , \ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

این دنبالهٔ جالب، در طول سالیان متمادی،ذهن ریاضیدانان را به خود مشغول کرد و آنها خواص بسیاری از دنبالهٔ فوق را بدست آوردند و کتابهای بسیاری راجع به این دنباله نوشته شد. به عنوان مثال با استفاده از خواص دنبالهٔ فیبوناچی بود که بعدها در سال ۱٦٤٤ ثابت شد عدد مرسن $M_{127} = 2^{127} - 1$ که عددی ۳۹ رقمی است، اول است .

ادوارد لوکاس یکی از همین ریاضیدانان بود که دنبالهٔ فوق را دنبالهٔ فیبوناچی نامگذاری کرد و بهتر است ما نیز از این به بعد دنبالهٔ فوق را با همین نام، بخوانیم. همین جناب آقای لوکاس، که معمای برج هانوی نیز از ایشان است، نزدیکترین دنباله به دنبالهٔ فیبوناچی را نیز تعریف کرده است. در دنبالهٔ لوکاس جملهٔ اول و جملهٔ دوم متفاوت با دنبالهٔ فیبوناچی است اما رابطهٔ بازگشتی دو دنبالهٔ یکی است یعنی :

$$L_\circ = 2, L_1 = 1, \ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

اما ارتباط جالب و نزدیکی بین دنبالههای فیبوناچی و لوکاس وجود دارد. دراین جا قصد داریم تعدادی از خواص دنبالهای فیبوناچی و لوکاس را بررسی کنیم و البته دیدگاه اصلی ما برای این بررسیها دیدگاه ترکیبیاتی خواهد بود.

چند خاصیت نمونه

خاصیت۱.

$$F_{\circ}+F_1+F_2+\ldots+F_n=F_{n-2}-1$$

خاصیت۲.

$$F_{n+1}=\binom{n}{\circ}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\ldots$$

خاصیت۳.

$$F_{m+n}=F_{m+1}.F_n+F_m.F_{n-1}$$

خاصیت٤.

$$F_{n+1}^2+F_n^2=F_{2n+1}$$

خاصیت۵.

$$L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$$

خاصیت٦.

$$5F_n=L_{n-1}+L_{n+1}$$

خاصیت۷.

$$L_{m+n}=F_{m+1}.L_n+F_m.L_{n-1}$$

خاصیت ۸.

$$F_nL_n=F_{2n}$$

خاصیت۹.

$$F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2=F_nF_{n+1}$$

خاصیت۱۰.

$$F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}=(-1)^{n+1}$$

خاصیت۱۱.

$$F_n\,|\,F_{nk}$$

خاصیت۱۲.

$$(F_n\ ,F_m)=F_{(m\ ,\ n)}$$

خواصی که در بالا به آنها اشاره شد اکثراً به روش استقراء (ساده و قوی) قابل اثبات هستند. سعی کنیـد قبل از پیگیری ادامهٔ مقاله، خود را بیازمایید و چند تایی از خواص مذکور را با استفاده از استقراء ثابت کنیـد.

(خواص ۱،۲،۳،۹ و ۱۰ را با استقرای ساده، خواص ۵ و ۷ را بـا اسـتقرای قـوی، خاصـیت٤ را از خاصـیت۳، خاصیت ٦ را از خاصیت۵، خاصیت۸ را از خواص ۳ و ۵، خاصیت ۱۱ را با استقراء روی k و خاصـیت۳ و خاصیت ۱۲ را نیز از خاصیت ۱۱ نتیجه بگیرید.)

دنبالهٔ فیبوناچی از دیدگاه ترکیبیاتی

به مسایل زیر و راه حل آنها توجه کنید :

مسأله اول.

فرض کنید a_n تعداد رشته‌هایی به طول n از صفر و یک باشد که در آنها هیچ دو رقم متـوالی همزمـان صفر نیستند. با این تعریف خواهیم داشت:

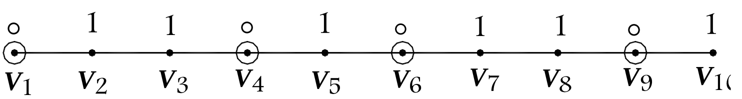
$$a_1 = 2\ ,\ a_2 = 3\ ,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

برای اثبات تساوی فوق، رقم اول (از سمت راست) رشته را در نظر می‌گیریم. اگر رقم اول صفر باشـد، رقم مجاور آن حتماً یک است و برای $n-2$ رقم دیگر a_{n-2} حالت وجود دارد. و اگر رقم اول یک باشد، برای $n-1$ رقم دیگر a_{n-1} حالت وجود دارد در نتیجه $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

بنابراین a_n همانند دنبالهٔ فیبوناچی افزایش می‌یابد و جملهٔ اول و دوم آن به ترتیب با جمله‌های سـوم و چهارم دنبالهٔ فیبوناچی برابر است. بنابراین $a_n = F_{n+2}$.

مسأله دوم.

فرض کنید b_n، تعداد روشهای انتخاب زیر مجموعه‌ای از رئوس یک مسیر به طـول n در یـک گـراف باشد(شکل ۱) به طوری که هیچ دو عضوی از مجموعهٔ انتخابی مجاور نباشند. چنین زیـر مجموعـه‌هـایی از رئوس گراف را مجموعه‌های مستقل می‌نامیم. به عنوان مثال مجموعهٔ $\{V_1\ ,\ V_4\ ,\ V_6\ ,\ V_9\}$ یک مجموعهٔ مستقل در گراف شکل (۱) است.



شکل ۱

با این تعریف خواهیم داشت :

$$b_1 = 2\ ,\ b_2 = 3\ ,\ b_n = b_{n-1} + b_{n-2}\ (n \geq 3)$$

سعی کنید رابطهٔ بازگشتی فوق را ثابت کنیـد. بـا مقایسـه دنبالـه‌هـای $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{F_n\}$ نتیجـه خواهد شد که $a_n = b_n = F_{n+2}$. این تساوی مشخص می‌کند که تناظر یـک‌بـه‌یـک بـین مجموعـه‌هـای مستقل رئوس یک مسیر به طول n، و رشته‌های n تایی (با ارقام صفر و یک) بـدون دو رقـم متـوالی صـفر وجود دارد که می‌توان این تناظر را به راحتی پیدا کرد (شکل۱).

مسأله سوم.

فرض کنید c_n تعداد افرازهای عدد طبیعی n به اعداد ۱ و ۲ باشد. پس $c_1 = 1$، $c_2 = 2$، $c_3 = 3C$
چون :

$$3 = 1 + 2 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$$

در اینجا نیز رابطهٔ بازگشتی همانند دنبالهٔ فیبوناچی است یعنی $(n \geq 3)$ $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ (ثابت کنید). در نتیجه $c_n = F_{n+1}$. می‌توان با بدست آوردن یک تناظر یک‌به‌یک ثابت کرد که $c_{n+1} = b_n$
به عنوان مثال اگر عدد ۱۱ را به صورت زیر به ۷ عدد افراز کنیم

$$11 = 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1$$

و مجموعه‌های جزیی این ۷ عدد را بدست می‌آوریم :

$$2\,,\,3\,,\,5\,,8\,,\,10,\,11$$

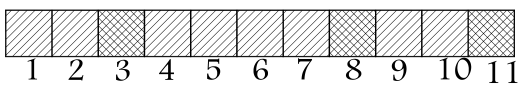
این اعداد، شماره رئوسی از گراف شکل (۱) هستند که با عدد یک برچسب گذاری شده‌اند.

مسأله چهارم.

فرض کنید می‌خواهیم یک مستطیل $1 \times n$ را که خانه‌های آن با شماره‌های ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند، توسط موزاییک‌های 1×1 (مربع) و 2×1 (دومینو) فرش کنیم. اگر d_n تعداد روشهای موجود برای این موزاییک‌بندی باشد، خواهیم داشت :

$$d_1 = 1\,,\; d_2 = 2\,,\; d_n = d_{n-1} + d_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

و در نتیجه $d_n = F_{n+1}$ که نشان می‌دهد $c_n = d_n$.



شکل۲. موزاییک بندی متناظر با افراز $11 = 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1$

هدف از ارائه چهار مسألهٔ فوق یافتن یک تفسیر جدید از جملات دنبالهٔ فیبوناچی است. تا با استفاده از آن، خواص دنباله را بتوانیم ثابت کنیم. در اینجا به نظر می‌رسد مسأله چهارم شهودی‌تر از بقیه است و می‌تواند مفید واقع شود. به عنوان مثال خاصیت۳ را در نظر بگیرید. با جایگذاری $n + 1$ به جای n داریم :

$$F_{n+m+1} = F_{m+1} F_{n+1} + F_m F_n$$

و با استفاده از مسألهٔ چهارم خاصیت۳ با تساوی زیر معادل است :

$$d_{n+m} = d_m . d_n + d_{m-1} . d_{n-1}$$

برای اثبات تساوی فوق توجه داریم که طرف چپ تساوی، d_{m+n} برابر است با تعداد روشهای موزاییک‌بندی یک مستطیل $1 \times (m + n)$ توسط موزاییک‌های مربع و دومینو. بنابراین باید ثابت کنیم طرف

راست تساوی نیز همین روشهای موزاییک‌بندی را می‌شمارد. دو حالت در نظر می‌گیریم (لابد چون در طرف راست دو جمله وجود دارد!) :

حالت اول. خانه‌های شمارهٔ m و $m+1$ توسط یک موزاییک دومینو پوشیده شده باشند. در این حالت موزاییک‌بندی اصلی به دو موزاییک‌بندی $m-1$ و $n-1$ تایی تقسیم می‌شود. خانه‌های قبل از خانه m را به d_{m-1} طریق و خانه‌های بعد از خانهٔ $m+1$ را به d_{n-1} طریق می‌توان فرش کرد. بنابراین $d_{m-1}d_{n-1}$ روش برای موزاییک‌بندی کل مستطیل، در این حالت وجود دارد.

حالت دوم. خانه‌های شماره m و $m+1$ توسط یک موزاییک دومینو پوشیده نشده باشند. در اینحالت موزاییک‌بندی اصلی به دو موزاییک بندی m تایی و n تایی تقسیم می‌شود. بنابراین تعداد کل روشهای موزاییک‌بندی در این حالت برابر است با $d_m.d_n$.

از دو حالت فوق نتیجه می‌شود که $d_{m+n} = d_{m-1}.d_{n-1} + d_m.d_n$.

تمرین. خواص ۱، ۲ و ٤ را با استفاده از همین روش ثابت کنید.

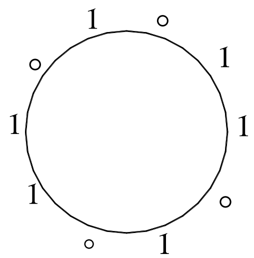
دنبالهٔ لوکاس از دیدگاه ترکیبیاتی

به مسایل زیر و راه‌حل آنها توجه کنید.

مسألهٔ پنجم.

فرض کنید A_n تعداد روشهای چیدن n رقم صفر و یک حول یک دایره باشد بطوری که هیچ دو رقم مجاوری همزمان صفر نباشند(شکل۳). با این تعریف داریم :

$A_2 = 3 = L_3\ ,\ A_3 = 4 = L_3$



شکل۳

ثابت می‌کنیم $A_n = L_n$. برای اینکار کافی است نشان دهیم A_n همانند L_n است یعنی $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ رابطهٔ بازگشتی رقم اول را در نظر بگیرید. اگر رقم اول یک باشد تعداد حالتها برای $n-1$ رقم دیگر $a_{n-1} = (F_{n+1})$ واگر رقم اول صفر باشد، دو رقم مجاور صفر حتماً یک هستند و تعداد حالتها برای $n-3$ رقم دیگر $a_{n-3} = (F_{n-1})$ خواهد بود. بنابراین $A_n = F_n + F_{n+1}$.

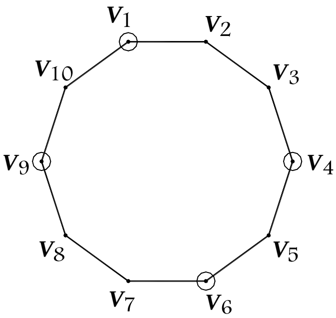
در نتیجه

$$A_n = F_{n-1} + F_{n+1} = F_{n-3} + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n = F_{n-3} + F_{n-1} + F_{n-2} + F_n$$
$$= A_{n-2} + A_{n-1}$$

در نتیجه $A_n = L_n$ (خاصیت ۵ نیز ثابت شد).

مسألهٔ ششم.

فرض کنید B_n تعداد مجموعه‌های مستقل از مجموعه رئـوس یک گراف دوری با n رأس (n ضلعی) باشـد (شـکل٤)، هماننـد مسألهٔ دوم ثابت می‌شود $B_n = A_n = L_n$.



شکل ٤. مجموعهٔ مستقل متناظر با رشتهٔ دوری شکل ۳

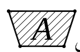
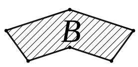
مسألهٔ هفتم.

فرض کنید C_n تعداد افرازهای عـدد n بـه اعـداد ۱ و۲ باشـد بطوری که دو جملهٔ اول و آخر همزمان ۲ نباشند. بـا ایـن تعریـف خواهیم داشت $C_2 = 2$ ، $C_3 = 3$ و بطور کلی

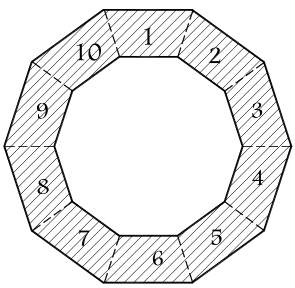
$$C_n = C_{n-1} + C_{n-3} = F_n + F_{n-2} = L_{n-1}$$

برای اثبات تساوی اول کافی است دو حالت برای جملهٔ اول در نظر بگیرید.

مسألهٔ هشتم.

فرض کنید می‌خواهید ناحیه‌ای به شکل ۵ را توسط موزاییک‌های به شکل  و 

فرش کنید (مساحت موزاییک اول A ، $\frac{1}{n}$ مساحت ناحیـهٔ شـکل۵ و مسـاحت موزاییـک دوم B ، دو برابر مساحت موزاییک A است.)



شکل ۵. در حالت $n = 10$

اگر D_n تعداد روشهای موزاییک‌بندی شـکل مـذکور باشـد خواهیم داشت :

$$D_1 = 1 \,,\; D_2 = 2 \,,\; D_3 = 4$$

همچنین

$$D_n = F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$$

برای اثبات تساوی فوق کافی است دو خانـهٔ ۱ و n را در نظـر بگیریـد. اگـر دو خانـهٔ مـذکور توسـط موزاییک نوع B پوشیده شده باشد برای پوشاندن بقیهٔ خانه‌ها d_{n-2} و در غیر اینصورت d_n حالت وجـود دارد. بنابراین

$$D_n = d_{n-2} + d_n = F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$$

همانطور که مشاهده کردید چهار مسألهٔ ۱ تا ٤ به ترتیب با چهار مسألهٔ ۵ تا ۸ متناظر هستند و بهتر است در اثبات خواص مربوط به دنباله‌های فیبوناچی و لوکاس از معادلهای آنها در مسأله‌های ٤ تا ۸ استفاده کنیم.

به عنوان مثال خاصیت۸ را در نظر بگیریدکه متناظر است با تساوی $d_{n-1}.D_n = d_{2n-1}$

فرض کنید می‌خواهیم مستطیل $1 \times (2n-1)$ را توسط موزاییک‌های مربع و دومینـو فـرش کنـیم. بـرای خانه‌های n و $n+1$ دو حالت وجود دارد :

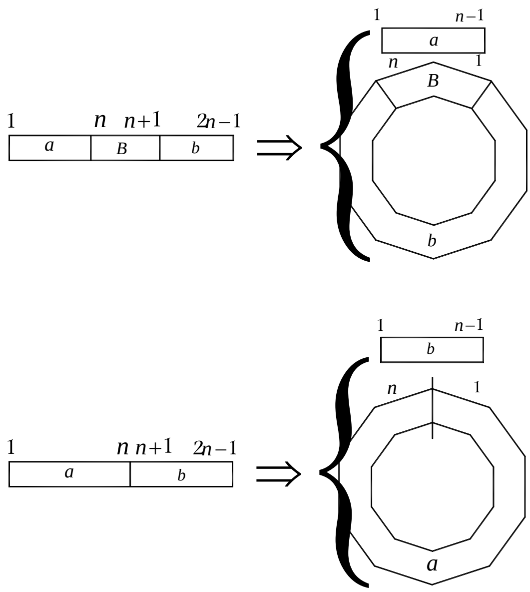
حالت اول : خانه‌های n و $n+1$ توسط یک موزاییک دومینو پوشیده شده باشند.

حالت دوم : خانه‌های مذکور توسط یک موزاییک دومینو پوشیده نشده باشند.

حالت اول را می‌توانیم با موزاییک‌بندی یک مستطیل $1\times(n-1)$ و یک مستطیل $1\times(n-2)$ متناظر کنیم و حالت دوم را می‌توان با موزاییک‌بندی یک مستطیل $1\times n$ و یک مستطیل $1\times(n-1)$ متناظر کنیم. بنابراین

$$\begin{aligned} d_{2n-1} &= d_{n-2}d_{n-1} + d_n d_{n-1} = d_{n-1}(d_{n-2} + d_n) \\ &= d_{n-1}(F_{n-1} + F_{n+1}) = d_{n-1}D_n \end{aligned}$$

البته شکل ٦ نشان می‌دهد می‌توانستیم موزاییک‌بندی مستطیل $1\times(2n-1)$ را به موزاییک‌بندی یک مستطیل $1\times(n-1)$ و یک ناحیه به شکل ٥ متناظر کنیم.



شکل ٦

تمرین. خواص ٦ و ٧ را به طریق مشابه ثابت کنید.

❖❖❖