کوشیار، سال اول، شماره ۱، صص ۳۳ ـ ۳۸

چند ایده برای حل مسایل هندسه ترکیبیاتی

محرم ایرد موسی

ایده اول. اصل اکسترمال (*Extremal principle*)

مسأله زیر توسط سیلوستر (*Silvester*) در سال ۱۸۹۳ مطرح شد:

مسألهٔ ۱. مجموعه متناهی S شامل n نقطه متمایز در صفحه مفروض است، به طوریکه خط گذرا از هر دو نقطه S ، از نقطه سومی از S می‌گذرد. نشان دهید نقاط S روی یک خط راست قرار دارند.

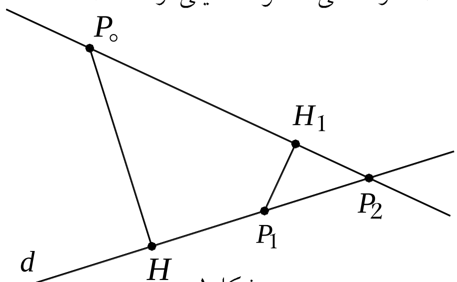
در نگاه اول، حل مسأله چندان مشکل به نظر نمی‌رسد. اما اگر فکر کردن روی مسأله را شروع کنید بزودی متوجه می‌شوید که مسأله چندان ساده‌ای نیست. اگر با این گونه از مسایل از قبل برخوردی نداشته باشید حتی شروع نیز برایتان دشوار خواهد بود.

گالای ($T.\ Gallai$) در سال ۱۹۳۳ برای مسأله سیلوستر راه حل پیچیده‌ای را ارائه کرد. اما راه حل کوتاهتری نیز در سال ۱۹۴۸ توسط کیلی ($LM.\ Kelly$) ارائه شد. کیلی در راه حل خود از اصل اکسترمال برای مجموعه‌های متناهی استفاده کرد. بیان ساده اصل این است که:

«هر مجموعه متناهی و ناتهی A از اعداد حقیقی، شامل کوچکترین عضو، $\min A$ و بزرگترین عضو، $\max A$ خواهد بود.»

به مسأله سیلوستر باز می‌گردیم. توجه کنید که متناهی بودن S برای همراستا بودن نقاط S یک شرط لازم است. به عنوان مثال مجموعه نقاط شبکه‌ای صفحه (نقاط با مختصات صحیح) را در نظر بگیرید. خط گذرا از نقاط شبکه‌ای (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از بی‌نهایت نقطه شبکه‌ای دیگر می‌گذرد اما به علت نامتناهی بودن مجموعه، همه نقاط شبکه‌ای همراستا نیستند. اما راه حلی که توسط کیلی ارائه شد:

فرض کنید نقاط S همراستا نباشند. از هر دو نقطه S خطی می‌گذرانیم (مجموعه این خطوط متناهی است)، سپس از هر نقطه P از مجموعه S ، خارج هر خط رسم شده، عمودی بر آن رسم می‌کنیم (مجموعه پاره‌خطهای عمود نیز مجموعه‌ای متناهی است).



شکل ۱

فرض کنید عمود $P_\circ H$ که از نقطه $P_\circ$ بر خط d گذرا از دو نقطهٔ P_1 و P_2 رسم شده است، کوتاهترین پاره‌خط عمود باشد. طبق فرض مسأله، d از نقطه سومی مانند P_3 از مجموعه S می‌گذرد. حداقل دو نقطه از نقاط P_1، P_2 و P_3 در یک طرف H (یا روی H) قرار می‌گیرند. فرض کنید دو نقطه P_1 و P_2 در یک طرف H قرار دارند (شکل ۱). مطابق شکل طول پاره‌خط P_1H_1 از مجموعه پاره‌خطهای عمود رسم شده از طول پاره‌خط PH که فرض کرده بودیم کوتاهترین پاره‌خط عمود است، کوچکتر است و این تناقض است. در نتیجه همه نقاط S در یک راستا هستند.

مشاهده کردید که متناهی بودن مجموعه نقاط به متناهی بودن مجموعه‌ای دیگر (مجموعه پاره‌خطهای عمود) منجر شده و از این طریق کیلی به راه حلی کوتاه اما محکم دست پیدا کرده است.

به مثال دوم می‌پردازیم :

مسألهٔ۲. n نقطه آبی و n نقطه قرمز در صفحه‌اند به طوری که هیچ سه‌تایی از آنها همراستا نیستند. ثابت کنید n پاره‌خط دو به دو نامتقاطع می‌توان رسم کرد که دو رأس هرکدام از آنها همرنگ نباشند.

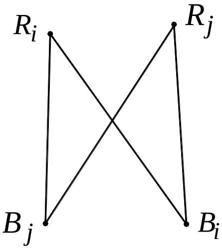
با طرح چند سؤال شما را دقایقی با مسأله فوق تنها می‌گذارم :

سؤال اول. به چند روش می‌توان n نقطه آبی را توسط n پاره‌خط به n نقطه قرمز وصل کرد؟ آیا مجموعه روشها متناهی است؟

سؤال دوم. در میان روشهای فوق آن جایی که از پاره‌خطهای بزرگتر استفاده می‌شود نقاط برخورد کمتر است یا آن جایی که از پاره‌خطهای کوچکتر استفاده می‌شود؟

سؤال سوم. در هر روش از روشهای فوق از n پاره‌خط استفاده شده است. فرض کنید مجموع طول n پاره‌خط در روشهای مختلف را در اختیار داشته باشید. آیا این اعدادمی‌توانند ما را به حل مسأله برسانند؟

اگر به سؤالات فوق درست جواب داده باشید به راه حل مسأله دست خواهید یافت. اینک راه حل مسأله. n نقطه آبی و n نقطه قرمز را می‌توان توسط n پاره‌خط به $n!$ روش به یکدیگر وصل کرد به طوری که دو رأس هر کدام از n پاره‌خط همرنگ نباشند. پس مجموعه روشهای فوق متناهی است. برای هر کدام از $n!$ روش فوق، مجموع طول n پاره‌خط را به دست می‌آوریم و مجموعه اعداد فوق را S می‌نامیم. S مجموعه‌ای متناهی است و در نتیجه دارای کوچکترین عضو است. فرض کنید کوچکترین عضو S متناظر با روش W_1 باشد. ثابت می‌کنیم در روش W_1 هیچ دو پاره‌خطی متقاطع نیستند.



شکل۲

فرض کنید چنین نباشد یعنی حداقل دو پاره‌خط R_iB_i و R_jB_j از n پاره‌خط رسم شده در روش W_1 متقاطع باشند (شکل ۲). در این صورت اگر به جای دو پاره‌خط فوق پاره‌های R_jB_i و R_iB_j را جایگزین کنیم، به n پاره‌خط جدید می‌رسیم که مجموع طول انها کمتر از مجموع طول n پاره‌خط در روش W_1 است (چرا؟) ، که تناقض است. بنابراین هیچ دو پاره‌خطی از n پاره‌خط رسم شده در روش W_1 متقاطع نیستند.

راه حل فوق به الگوریتمی ساده برای به دست آوردن n پاره‌خط دو به دو نامتقاطع و با دو رأس ناهمرنگ، نیز اشاره می‌کند. چند مسأله زیر از ایده فوق قابل حل هستند.

مسألهٔ۳. n نقطه در صفحه مفروضند به طوری که همگی آنها در یک راستا نیستند. ثابت کنید خطی وجود دارد که دقیقاً از دو نقطه از n نقطه فوق می‌گذرد.

مسألهٔ٤. n خط دو به دو متقاطع در صفحه مفروضند به طوری که از نقطه برخورد هر دوتای آنها خط سومی از همین مجموعه می‌گذرد. ثابت کنید همه خطوط از یک نقطه می‌گذرند.

مسألهٔ۵. n نقطه در صفحه مفروضند به طوری که هیچ سه‌تایی از آنها در یک راستا نیستند. ثابت کنید n ضلعی ساده‌ای وجود دارد که رئوس آن، n نقطه فوق می‌باشند (چندضلعی ساده، چند ضلعی است که اضلاعش همدیگر را قطع نکنند).

مسألهٔ٦. n خط دو به دو متقاطع در صفحه مفروضند به طوری که همگی یک نقطه مشترک نداشته باشند. نشان دهید نقطه برخوردی وجود دارد که دقیقاً دو خط از n خط مذکور از آن نقطه می‌گذرند.

مسألهٔ۷. n نقطه در صفحه مفروضند به طوری که همگی در یک راستا نیستند. از هر دو نقطه خطی می‌گذرانیم. ثابت کنید تعداد خطوط رسم شده از n کمتر نیست.

راهنمایی. از مسأله ۳ استفاده کنید و روی تعداد نقاط استقراء بزنید.

مسألهٔ۸. n نقطه در صفحه مفروضند. هر سه‌تایی از آنها مثلثی با مساحت نابیشتر از یک تشکیل می‌دهند. ثابت کنید n نقطه مذکور در داخل مثلثی با مساحت نابیشتر از ٤ قرار دارند.

راهنمایی. از مثلثهای فوق، مثلثی را در نظر بگیرید که بیشترین مساحت را دارد.

مسألهٔ۹. n نقطه در صفحه وجود دارند که فاصله هر دو نقطه از آنها بیشتر از یک نیست. ثابت کنید همه نقاط درون یا روی دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{3}}{3}$ قرار دارند.

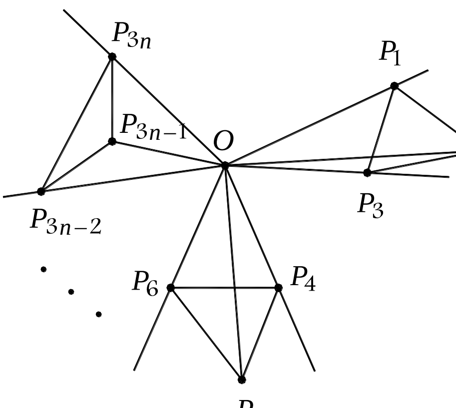
ایده دوم : یک نقطه استثنایی!

مجموعه‌ای متناهی از نقاط در صفحه مانند S مفروض است. از هر دو نقطه S خطی می‌گذرانیم. مجموعه خطوط حاصل به علت متناهی بودن نمی‌تواند کل صفحه را بپوشاند. بنابراین نقطه‌ای مانند O می‌توان یافت که روی هیچکدام از خطوط رسم شده نباشد. اکنون نقطه O را به تمام نقاط S وصل کنید و امتداد دهید. هیچ دوتایی از نیم‌خطهای حاصل در یک راستا قرار نمی‌گیرند (با توجه به نحوه انتخاب نقطه O). این نقطه استثنایی می‌تواند برای حل بعضی از مسایل مفید باشد.

مسألهٔ۱۰ (المپیاد کامپیوتر ۷۲). $3n$ نقطه در صفحه مفروض است به طوری که هیچ سه‌تایی از آنها در یک راستا نیستند. ثابت کنید که می‌توان با این نقاط n مثلث ساخت که کاملاً از هم جدا باشند. دو مثلث را جدا از هم می‌گوییم اگر هر یک در بیرون دیگری قرار گرفته باشد و رئوس و اضلاع آنها هیچ برخوردی با یکدیگر نداشته باشند.

با مقایسه صورت مسأله و ایده نقطه استثنایی، حتماً به راه حل مسأله پی برده‌اید.

از هر دو نقطه از $3n$ نقطه فوق خطی می‌گذرانیم. نقطه O را خارج همه خطوط رسم شده در نظر می‌گیریم و به تمام $3n$ نقطه وصل می‌کنیم (شکل۳). فرض کنید P_1 یکی از $3n$ نقطه باشد. با حرکت حول نقطه O در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، نقاط بعدی را به ترتیب P_2 ، P_3 ، . . . و P_{3n} می‌نامیم. در این صورت مثلث‌های $\Delta P_1P_2P_3$، $\Delta P_4P_5P_6$ ، . . . و $\Delta P_{3n-2}P_{3n-1}P_{3n}$ ، n مثلث دو به دو جدا از هم خواهند بود؛ چون در داخل زاویه‌های $\angle P_1OP_3$، $\angle P_4OP_6$ ، . . . و $\angle P_{3n-2}OP_{3n}$ قرار دارند که تنها در نقطه O مشترک هستند.

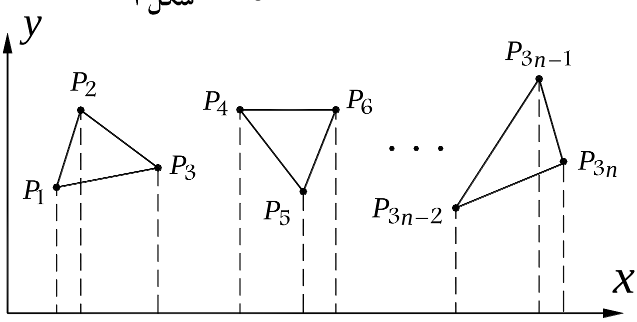


شکل۳

اکنون سعی کنید مسألهٔ۵ را علاوه بر روش اول از روش نقطه استثنایی نیز حل کنید.

ایده سوم : دستگاه مختصات

در نظر گرفتن محورهای مختصات در صفحه و مرتب کردن نقاط بر حسب عرض نقاط می‌تواند کمک مؤثری برای حل بعضی از مسایل باشد. برای مثال می‌توانیم مسأله ۱۰ را با این روش نیز حل کنیم :

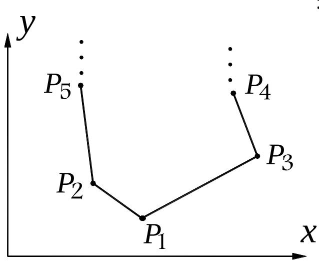


شکل٤

دستگاه مختصات دلخواهی در صفحه در نظر بگیرید و فرض کنید $P_i(x_i, y_i)$ $(1 \le i \le 3n)$ نقاط مذکور باشند به طوری که :

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{3n}$$

در این صورت مثلثهای $\Delta P_1P_2P_3$ ، $\Delta P_4P_5P_6$ ، . . . و $\Delta P_{3n-2}P_{3n-1}P_{3n}$، دو به دو جدا از هم خواهند بود (شکل ٤). مسأله ۵ را نیز می‌توان از این روش حل کرد :



شکل ۵

دستگاه مختصات دلخواهی در صفحه در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $P_i(x_i, y_i)$ $(1 \le i \le n)$ ، نقاط مفروض باشند به طوری که $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$. نقطه P_1 را به P_2 و P_3 وصل می‌کنیم. نقاط P_2 و P_3 را می‌توان با دو پاره‌خط به دو صورت به نقاط P_4 و P_5 وصل کرد که در یک صورت متقاطع و در یک صورت نامتقاطع هستند.

از این دو حالت، حالت نا متقاطع را در نظر می‌گیریم. سپس همین عمل را برای دو نقطه P_6 ، P_7 ، P_8 ، P_9 و . . . ادامه می‌دهیم (شکل ۵). با توجه به زوج یا فرد بودن n دو حالت پیش می‌آید: اگر n زوج باشد، نقطه P_n در پایان باقی می‌ماند که به دو نقطه P_{n-2} و P_{n-1} وصل می‌کنیم و اگر n فرد باشد در پایان دو نقطه P_{n-1} و P_n را به هم وصل می‌کنیم. بدین صورت n ضلعی ساده‌ای تشکیل خواهد شد.

دو مسأله زیر را می‌توان از این روش حل کرد:

مسألهٔ۱۱. فرض کنید P مجموعه‌ای از نقاط در صفحه باشد به طوری که هر نقطه A از P ، نقطه میانی پاره‌خطی مانند BC است به طوری که $B,C \in P$. ثابت کنید P یک مجموعه نامتناهی است.

مسألهٔ۱۲. تعدادی متناهی چندضلعی (نه لزوماً محدب) در صفحه مفروضند به طوری که هر دوتایی از آنها متقاطع هستند. ثابت کنید خطی می‌توان رسم کرد که با همه چندضلعی‌ها متقاطع باشد.

ایده چهارم : $\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}$

فرض کنید a_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ اعدادی حقیقی باشند. در این صورت:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \qquad (*)$$

فرض کنید n جعبه متمایز در اختیار داریم. می‌خواهیم اشیایی از n نوع مختلف را در این جعبه‌ها توزیع کنیم. همچنین تعداد اشیاء جعبه iام را با a_i $(1 \le i \le n)$ و تعداد کل اشیاء نوع iام را که در جعبه n قرار دارند با b_i $(1 \le i \le n)$ نمایش دهیم. در این صورت :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

برای اثبات تساوی فوق فرض کنید a_{ij} ، تعداد اشیاء نوع j ام در جعبه شماره i باشد. در این صورت:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

در نتیجه:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

مثال فوق کاربرد ساده‌ای از تساوی $(*)$ را نشان می‌دهد. سعی کنید مسأله زیر را حل کنید:

مسأله ۱۳ (پاتنام ۱۹۷۸). n نقطه P_1 ، P_2 ، . . . و P_n در صفحه مفروضند. ثابت کنید تعداد زوج نقاطی که فاصله‌شان برابر واحد است از $n\sqrt{n}$ کمتر است.

راه حل. به مرکز هر کدام از نقاط دایره‌ای به شعاع واحد رسم می‌کنیم. فرض کنید تعداد نقاط روی دایره به مرکز P_i $(1 \le i \le n)$ ، m_i باشد.

در این صورت تعداد زوج نقاط با فاصله واحد برابر است با $N=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i$.

تعداد زوج مرتب‌های $(\{c_i, c_j\}, P_k)$ را که در آنها c_i و c_j دوتا از دایره‌های فوق و P_k یکی از نقاط تقاطع c_i و c_j می‌باشد، می‌شماریم. هر دو دایره حداکثر در دو نقطه متقاطع هستند. بنابراین حداکثر تعداد زوج‌مرتب‌های فوق $2\times\binom{n}{2}$ خواهد بود. از طرف دیگر چون تعداد زوج دایره‌های متقاطع در نقطهٔ P_k برابر است با $\binom{m_k}{2}$، در نتیجه تعداد زوج‌مرتب‌های فوق دقیقاً برابر است با $\sum_{i=1}^{n}\binom{m_i}{2}$. در نتیجه :

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{m_i}{2}\le 2\binom{n}{2}$$

بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^2-2N=\sum_{i=1}^{n}(m_i^2-m_i)\le 2n(n-1)$$

با توجه به نامساوی واسطه حسابی ـ تربیعی می‌دانیم :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^2\ge\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2=\frac{4N^2}{n}$$

در نتیجه :

$$\frac{4N^2}{n}-2N\le 2n(n-1)\Rightarrow 2N^2-nN-n^2(n-1)\le \circ$$

$$\Rightarrow N\le\frac{n+\sqrt{n^2+8n^2(n-1)}}{4}=n\left(\frac{1+\sqrt{8n-7}}{4}\right)\le n\sqrt{n}$$

سعی کنید مسأله زیر را همانند مسأله ۱۳ حل کنید.

مسألهٔ ۱٤ (المپیاد جهانی ۱۹۸۹). فرض کنید n و k اعدادی طبیعی باشند و S مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه باشد به طوری که : (i) هیچ سه نقطه‌ای از S در یک راستا نیستند.

(ii) برای هر نقطه P از S ، حداقل k نقطه از S ، با P هم‌فاصله هستند.

ثابت کنید :

$$k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$$

مراجع:

[1] C. Chuan - Chong , K. Khee - meng , Principles and techniques in combinatorics , World Scientific Pub. , Singapore , 1992.

[2] A. Engel , Problem - solving strategies , Springer - Verlag , New York , 1998.