بیا تا در این شیوه چالش کنیم!

قبلش برو یک فنجان قهوه یا چای برای خودت بریز

محرم ایردموسی

مقدمه

اگر اهل مسـئله‌های چالشی هسـتید، شما را به خواندن این مطلب دعوت می‌کنیم. در هر شماره با چند مجموعه از مسـئله‌های مرتبط با هم، سعی می‌کنیم علاوه بر به چالش‌کشیدن ذهن پویای شما مطالبـی را هم مرور کنیم یـا مطالب جدیدی یاد بگیریم. کاغذ و قلم فراموش نشود، چون بدون آن لطفی ندارد. قبلش بروید و برای خودتان یک فنجان چای یا قهـوه بریزید و هر چالش را گام‌به‌گام پیش ببرید.

چالش اول

یک: اگر وارون n عدد طبیعی نخست را با هم جمع کنیم و حاصل را با H_n نمایش دهیم، ثابت کنید:

$$H_{۲^n}=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+...+\frac{۱}{۲^n}\geq ۱+\frac{n}{۲}$$

راهنمایی:

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}>\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸}>\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲},...$$

دو: فرض کنید مقدار $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+...$ (مجموع وارون‌های همهٔ عددهای طبیعی) را با H_∞ نمایش داده‌ایم. به کمک قسمت قبل نشان دهید H_∞ از هر عدد مثبت مانند M (هر چقدر هم که بزرگ باشد) بزرگ‌تر است.

سه: می‌توان نتیجهٔ قسمت دوم را این‌طور نوشت: $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+...=+\infty$. چه توجیهی می‌توانید برای بی‌نهایت بودن این مقدار ارائه کنید؟

چهار: اصلاً بیایید $+\infty$ را عددی تعریف کنیم که از همهٔ عددهای حقیقی بزرگ‌تر است.

نشان دهید:

$$A=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}+...=+\infty$$

راهنمایی: نشان دهید: $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+...+\frac{۱}{۲^n}\geq\frac{۱}{۲}+\frac{n-۱}{۴}$

و نتیجه بگیرید A از هر عدد مثبتی مانند M بزرگ‌تر است.

پنج: به‌طور مشابه نشان دهید: $۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}+...=+\infty$.

در واقع هدف این اسـت که نشان دهیم مجموع وارون‌های همهٔ عددهای طبیعی فرد برابر است با بی‌نهایت. یعنی این مجموع از هر عدد حقیقی مثبتی مانند M بزرگ‌تر است.

شش: اگر $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+...$ یک عدد حقیقی مانند a بود، آنگاه نتیجه می‌شد:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}+...=\frac{۱}{۲}(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+...)=\frac{a}{۲}$$

و در نتیجه:

$$۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}+\ldots=(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\ldots)-$$
$$(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\ldots)=a-\frac{a}{۲}=\frac{a}{۲}$$

در نتیجه باید داشته باشیم: $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\ldots=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\ldots$.

اما داریم: $۱>\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}>\frac{۱}{۴}$ و... چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

چالش دوم

یک: می‌دانیم مجموعهٔ n عضوی x، ۲^n زیرمجموعه دارد. اگر بخواهیم یک زوج زیرمجموعه از x مانند (A و B) انتخاب کنیم، چند انتخاب وجود دارد؟

راه‌حل: برای انتخاب A، ۲^n انتخاب و برای انتخاب B نیز ۲^n انتخاب وجود دارد. در نتیجه برای انتخاب (A و B) با شرط $A\subset X$ و $B\subset X$، $N=۲^n\times ۲^n=۴^n$ انتخاب وجود دارد.

دو: اگر دوست داشته باشید زوج زیرمجموعهٔ انتخابی، یعنی (A,B)، دارای این خاصیت باشد که $A\subseteq B$، آنگاه چند انتخاب وجود دارد؟

راهنمایی: برای هر عضو x از X، سه حالت وجود دارد:

۱. x نه در A باشد و نه در B؛

۲. x هم در A باشد و هم در B؛

۳. x در B باشد، اما در A نباشد.

با توجه به سه انتخاب موجود برای هر عضو X، پاسخ مسئله چیست؟

سه: اگر قسمت قبل را حل کردید و به پاسخ ۳^n رسیدید، حالا به این چالش جواب بدهید که در چند تا از زوج‌های قسمت دوم، $A\subset B$ اما: $A\neq B$.

راهنمایی: تعداد زوج‌های (A,B) با شرط A=B چندتاست؟

چهار: اگر در قسمت سوم به پاسخ $N=۳^n-۲^n$ رسیدید، حالا به این چالش پاسخ دهید که در چند زوج مرتب (A,B)، نه A زیرمجموعهٔ B است و نه B زیرمجموعهٔ A؟

پنج: در چند زوج مرتب مانند (A,B) با شرط $A\cup B=X$ برقرار است؟

راهنمایی: اول به این فکر کنید که برای هر عضو x از X چند انتخاب در ارتباط با A و B وجود دارد. بعد از آن مشابه قسمت دوم عمل کنید.

شش: در چند زوج مرتب (A,B)، شرط $A\cap B=\phi$ برقرار است؟

راهنمایی ۱. همانند قسمت‌های دوم و پنجم عمل کنید.

راهنمایی ۲. اگر اشتراک دو زیرمجموعهٔ A و B از X، تهی باشد، آنگاه اجتماع، A^c و B^c (مکمل‌های A و B) برابر با X خواهد شد. یعنی از $A\cap B=\phi$ می‌رسیم به $A^c\cup B^c=X$. به کمک این مطلب استدلال کنید که پاسخ‌های قسمت‌های پنجم و ششم برابر است.

چالش سوم

یک: دانش‌آموزی برای محاسبهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{\sqrt{2x-1}}{3}$، این‌گونه استدلال کرده است:

$$x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{\text{منهای ۱}} 2x-1 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{2x-1} \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۳}} \frac{\sqrt{2x-1}}{3}=y$$

$$\frac{9y^2+1}{2} \xleftarrow{\text{تقسیم بر ۲}} (3y)^2+1 \xleftarrow{\text{به علاوه ۱}} (3y)^2 \xleftarrow{\text{توان ۲}} 3y \xleftarrow{\text{ضرب در ۳}} y$$

در نتیجه: $f^{-1}(x)=\frac{9x^2+1}{2}$.

آیا این استدلال درست است؟

دو: اگر f و g دو تابع وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید fog (ترکیب f و g) نیز وارون‌پذیر است.

راهنمایی:
باید از یک به یک بودن f و g ثابت کنید fog نیز یک به‌یک است.

سه: اگر: $y=f(x)$، آن‌گاه: $x=f^{-1}(y)$. ثابت کنید:
$f(f^{-1}(x))=x\ ,\ f^{-1}(f(x))=x$

چهار: اگر $f(f(x))=x$ برای هر $x\in D_g$ و $g(f(x))=x$ برای هر $x\in D_f$، ثابت کنید f یک به‌یک است و وارون آن تابع g است.

راهنمایی:
برای اثبات یک‌به‌یک بودن f باید از اینکه $f(x_1)=f(x_2)$ نتیجه بگیرید: $x_1=x_2$. به این منظور از تابع g کمک بگیرید.

پنج: اگر f و g وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید: $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$.

راهنمایی: از قسمت چهار کمک بگیرید.

شش: آیا می‌توانید قسمت قبل را به سه تابع وارون‌پذیر تعمیم دهید؟ به چهار تابع وارون‌پذیر چطور؟ به n تابع وارون‌پذیر چطور؟ ارتباط این قسمت و قسمت اول را بررسی کنید.

چالش چهارم

یک: به هر عدد طبیعی n، بازه $I_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ را نسبت می‌دهیم. به‌نظر شما اشتراک تمام بازه‌های I_1، I_2، I_3 و ... چه خواهد شد؟
شهودتان چه می‌گوید؟ آیا می‌توانید حدستان را دقیق ثابت کنید؟

راه‌حل: شهودمان می‌گوید پاسخ مجموعهٔ تک عضوی {۰} است. برای اثبات از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید اشتراک آن‌ها شامل عدد غیرصفری مانند a باشد. ابتدا فرض می‌کنیم $a>0$. در نتیجه $\frac{1}{a}>0$.
عدد طبیعی n_1 را بزرگ‌تر از $\frac{1}{a}$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه $\frac{1}{a}<n_1$ و بنابراین $a>\frac{1}{n_1}$. پس:

$$a\notin(-\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_1})\Rightarrow a\notin(-1,1)\cap(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cap(\frac{-1}{3},\frac{1}{3})\cap...$$

که با فرض اول در تناقض است و اشتراک مذکور شامل هیچ عدد مثبتی نیست. با همین شیوه نشان دهید اشتراک این بازه‌ها شامل هیچ عدد منفی هم نیست.

دو: به هر عدد طبیعی یک بازه نسبت دهید، به‌طوری که اشتراک تمامی آن‌ها برابر {۱} باشد.

سه: قسمت قبل را تکرار کنید، با این شرط که اشتراک تمامی بازه‌ها برابر بازهٔ [۰و۱] باشد.

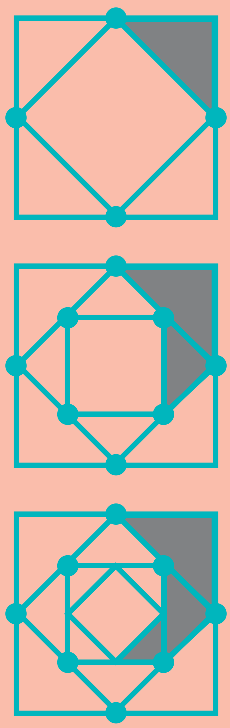
چهار: آیا می‌توان سه بازهٔ باز (به‌صورت (a,b)) پیدا کرد، به‌طوری که دو به دو اشتراک ناتهی داشته باشند، اما اشتراک هر سه تهی باشد؟
احتمالاً شهودتان می‌گوید پاسخ منفی است. سعی کنید این ادعا را ثابت کنید.

پنج: یک باستان‌شناس دربارهٔ چهار دورهٔ تاریخی اقوام متفاوت تحقیق می‌کند. و چهار شیء باستانی A، B، C و D پیدا کرده است، به‌طوری که A متعلق به دوره‌های تاریخی اول و دوم، B متعلق به دوره‌های تاریخی دوم و سوم، C متعلق به دوره‌های تاریخی سوم و چهارم و D متعلق به دوره‌های تاریخی چهارم و اول است. آیا او می‌تواند نتیجه بگیرد تمامی این دوره‌های تاریخی در برهه‌ای از تاریخ معاصر بوده‌اند؟

مسئله را با بازه‌های زمانی مدل‌سازی و ادعای خود را ثابت کنید.

چالش پنجم

یک: مربعی به ضلع ۱ در نظر بگیرید. وسط ضلع‌های آن را به طور متوالی به هم وصل کنید و یکی از مثلث‌های ایجادشده را رنگ کنید. حال همین کار را با مربع کوچک‌تر تکرار کنید. دوباره همین کار را روی مربع سوم تکرار کنید. اگر این کار را بی‌نهایت بار تکرار کنید، چه کسری از مربع اولیه رنگ می‌شود؟



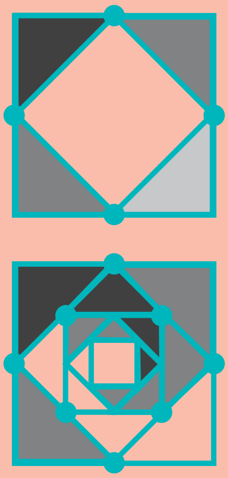
راهنمایی برای راه اول

مساحت مثلث‌های اول، دوم و سوم چقدر است؟ این مساحت‌ها چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟
مجموع n جملهٔ اول این دنباله برحسب n را به دست آورید.
اگر n را زیاد کنید، این مجموع به سمت چه عددی می‌رود؟

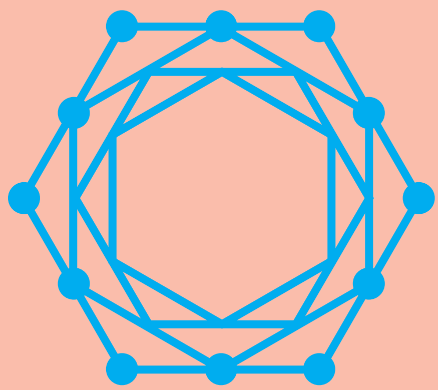
راهنمایی برای راه دوم

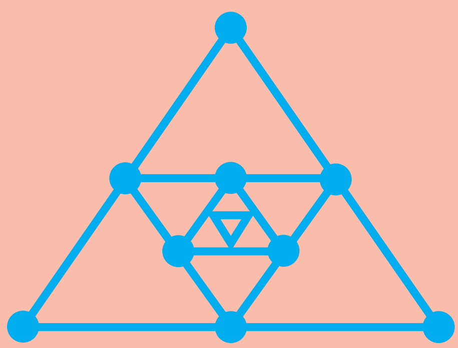
بیایید از همان ابتدا که مثلث اول را رنگ سبز زدید، سه مثلث دیگر را هم با رنگ‌های زرد، قرمز و آبی رنگ کنید. در مرحلهٔ دوم هم از چهار رنگ فوق برای چهار مثلث دوم استفاده کنید و این کار را ادامه دهید.

آیا با این رنگ‌آمیزی به نتیجهٔ مطلوب می‌رسید؟



دو: مسئلهٔ قبل را برای شکل‌های زیر تکرار کنید. البته صورت مسئله را هم باید خودتان زحمت بکشید و طرح کنید!





پی‌نوشت

۱. مصرعی از شعر سعدی