

حدس های نادرست از آنچه فکر می کنید به شما نزدیک ترند!

تمرین ۱. سعی کنید به کمک دو تساوی $5^4 + 2^4 = 641$ و $1 + 5 \times 2^7 = 641$ بخش پذیری F_5 بر 641 را اثبات کنید. درباره مقادیری از اعداد فرما که اول هستند اطلاعات زیادی نداریم و سؤال های بی شماری درباره آنها مطرح هستند. آیا اعداد اول در میان اعداد فرما بی شمار هستند؟ اعداد مرکب چطور؟

در سال ۲۰۱۴ ثابت شده است که برای مقادیر $5 \leq n \leq 32$ مرکب است هر چند تجزیه F_n به عامل های اول تنها برای مقادیر $11 \leq n \leq 0$ مشخص شده است. و جالب تر این که هنوز هیچ کدام از عامل های اول F_4 و F_7 معلوم نیست!

حدس جدیدی که درباره اعداد فرما وجود دارد آن است که اعداد اول فرما، فقط همان اعداد F_0 تا F_4 هستند که فرما بررسی کرده بود. بررسی درستی این حدس یکی از چالش های فعلی ریاضیدانان است به ویژه آنهایی که به موضوع نظریه اعداد علاقمند هستند.

تمرین ۲. اگر $2^m + 1$ اول باشد آنگاه ثابت کنید m عامل اول فرد ندارد و باید به فرم $m = 2^n$ باشد.

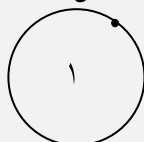
در ادامه می خواهیم شما را به دو چالش برای حدس زدن دعوت کنیم.

چالش اول. روی دایره C ، n نقطه در نظر بگیرید و آنها را دو به دو به هم وصل کنید. سطح دایره به حداکثر چند ناحیه تقسیم می شود؟

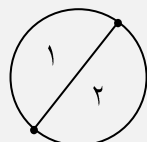
ابتدا مسأله را برای چند مقدار اولیه n بررسی می کنیم.

برای $n = 1$ تنها یک ناحیه وجود دارد (شکل ۱).

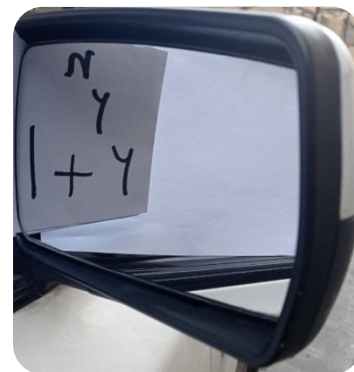
و برای $n = 2$ ، دو ناحیه وجود دارد (شکل ۲).



شکل ۱



شکل ۲



به طور قطع حدس زدن کار ساده ای نیست. به ویژه اگر در دنیای ریاضیات باشد. یک حدس ریاضی گزاره ای است که شواهد موجود دلالت بر درستی آن دارند اما هنوز اثباتی برای آن نداریم. حدس های ریاضی همانند مسأله های ریاضی، موتور محرکه ریاضیات هستند و جنب و جوشی در میان ریاضیدانان پدید می آورند. حتی ممکن است ریاضیدانان در تلاش برای اثبات یک حدس ریاضی، به حقایق ارزشمند دیگری نیز دست پیدا کنند، اما حدس زدن را نباید کار ساده ای تصور کرد. نمونه های تاریخی بسیاری وجود دارند که حدس های ارائه شده نقض شده اند یعنی با ارائه یک مثال که به مثال نقض مشهور است، نادرستی حدس مشخص شده است.

در ادامه به یک نمونه از این حدس ها می پردازیم.

حدس ۱. برای هر عدد صحیح و نامنفی n ، عدد $F_n = 2^{2^n} + 1$ اول است.

این حدس اولین بار توسط فرما ریاضیدان معروف فرانسوی ارائه شد. او با جایگذاری مقادیر ۰ تا ۴ به جای n ، به اعداد اول ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷، و ۶۵۵۳۷ دست یافت. مقدار F_5 برابر است با ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ که فرما احتمالاً موفق به بررسی اول یا مرکب بودن آن نشده بود. اما فرما پنج مقدار اول را مبنای حدس خود قرار داد و ادعا کرد که این مقادیر همگی اول هستند. این حدس در سال ۱۷۳۲ توسط لئونارد اویلر ریاضیدان سوئیسی رد شد. اویلر نشان داد که F_5 بر ۶۴۱ بخش پذیر است و در نتیجه اول نیست.

حدس های نادرست از آنچه فکر می کنید به شما نزدیک ترند!

جمله اول یعنی $\binom{n}{0}$ یا همان مقدار ۱ نشان دهنده دایره اولیه، جمله دوم $\binom{n}{2}$ نشان دهنده تعداد پاره خطها و یا وترهای رسم شده و جمله سوم $\binom{n}{4}$ نشان دهنده تعداد نقاط برخورد وترها است.

چالش دوم. اعداد طبیعی فرد و بزرگتر از ۴۲ را در نظر بگیرید: ۴۳, ۴۵, ۴۷, ۴۹, ...

جمله نخست عددی اول است:

(۴۳), ۴۵, ۴۷, ۴۹, ۵۱, ...

بعد از آن، یک جمله را حذف کنید:

(۴۳), ۴۵, ۴۷, ۴۹, ۵۱, ...

جمله بعد از آن مجدداً عددی اول است:

(۴۳), ۴۵, (۴۷), ۴۹, ۵۱, ...

بعد از آن، دو جمله بعدی را حذف کنید:

(۴۳), ۴۵, (۴۷), ۴۹, ۵۱, ...

جمله بعد از جملات حذف شده، عددی اول است:

(۴۳), ۴۵, (۴۷), ۴۹, ۵۱, (۵۳), ۵۵, ...

بعد از آن، سه جمله را حذف کنید:

... , (۵۳), ۵۵, ۵۷, ۵۹, ۶۱, ...

جمله بعد از جملات حذف شده، عددی اول است:

... , ۵۵, ۵۷, ۵۹, (۶۱), ۶۳, ...

بعد از آن، ۴ جمله را حذف کنید. خواهید دید که مجدداً جمله

بعد از جملات حذف شده باز هم اول است:

... , (۶۱), ۶۳, ۶۵, ۶۷, ۶۹, (۷۱), ...

در ادامه چه حدسی می زنید؟ بعد از حذف ۵ جمله بعد از ۷۱،

باز هم به یک عدد اول می رسیم؟ امتحان می کنیم:

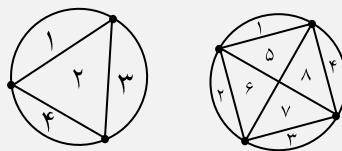
... , (۸۳), ۸۵, ۸۷, ۸۹, ۹۱, ...

پاسخ مثبت است!

آیا آنقدر شواهد موجود برای شما قوی هستند که بخواهید

حدسی بزنید؟ آیا ترغیب شده اید که یک مرحله دیگر را هم پی

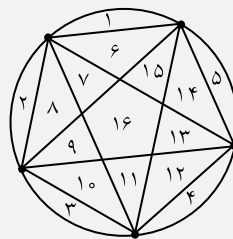
برای $n = 3$ و $n = 4$ به ترتیب ۴ و ۸ ناحیه ایجاد می شود (شکل ۳).



شکل ۳

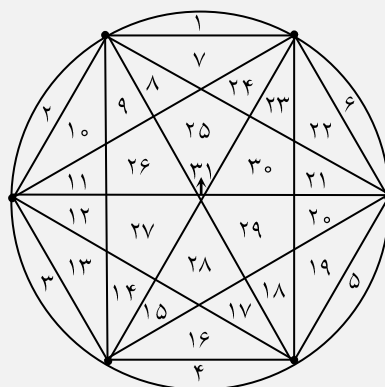
تا اینجا کار پاسخ های به دست آمده، توان های متوالی ۲ هستند. برای اطمینان مسأله را برای $n = 5$ نیز بررسی می کنیم.

برای $n = 5$ شکل ۴ نشان می دهد که حداکثر ۱۶ ناحیه یا 2^4 ناحیه در داخل دایره پدید می آید و مقدار به دست آمده این حدس را به ذهن متبادر می کند که شاید پاسخ مسأله در حالت کلی $a_n = 2^{n-1}$ باشد.



شکل ۴

پس برای درستی حدس، مسأله را برای $n = 6$ بررسی می کنیم. شکل ۵ نشان می دهد که حدس مان نادرست است! و تعداد ناحیه های پدید آمده ۳۱ تا است.



شکل ۵

تمرین ۳. ثابت کنید تعداد ناحیه ها در چالش اول برابر است

$$با \quad a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

این نکته درباره پاسخ فوق شاید برای شما جالب باشد که

حدس های نادرست از آنچه فکر می کنید به شما نزدیک ترند!

بگیرید؟ برای آن که چالش را چالشی تر کنیم یک مرحله دیگر این فرایند را انجام می دهیم:

... , (۹۷) , ۹۵ , ۹۳ , ۹۱ , ۸۹ , ۸۷ , ۸۵ , (۸۳) , ...

فکر می کنید این فرآیند حذف کردن و اول بودن جمله بعد از جملات حذف شده در دنباله اعداد فرد بزرگتر از ۴۱، همواره

برقرار باشد؟

پاسخ منفی است!

تمرین ۴. سعی کنید جمله عمومی دنباله اعداد حاصل از این فرآیند یعنی دنباله ... , ۹۷ , ۸۳ , ۷۱ , ۶۱ , ۵۳ , ۴۷ , ۴۳ را بر حسب n به دست آورید و اول بودن آن را بررسی کنید. سپس جمله ای در این دنباله پیدا کنید که مرکب باشد.

در تمرین فوق سعی نکنید اولین جمله مرکب را پیدا کنید. سی و نه جمله نخست این دنباله همگی اول هستند. این مثال یک واقعیت مهم را آشکار می کند. ممکن است مثال نقض یک حدس، مدت ها طول بکشد تا خود را به شما نشان بدهد و در حدس های جدی ریاضیات گاهی این زمان چند ده سال و یا حتی قرن ها طول بکشد. پس عجله ای برای به ثبت رساندن حدس به نام خودتان نداشته باشید. حدس های نادرست از آنچه فکر می کنید به شما نزدیک ترند!

مراجع :

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number

2. <https://www.youtube.com/watch?v=n4VWgquP8D0>.



فراغتگاه شماره ۵

معمای منطقی :

در یک شهر کوچک، ناگهان اتفاق بدی افتاد و از خانه یکی از شهروندان، وسیله ای سرقت شد. کارآگاهی خبره برای بررسی موضوع اعزام شد و در نتیجه چهار مظنون به اسامی اکبر، بابک، صمد و داود، شناسایی و برای بازپرسی احضار شدند. در بازپرسی، آنها اظهارات زیر را نمودند :

- اکبر : «من در زمان سرقت در شهر نبودم.»

- بابک : «صمد مجرم است.»

- صمد : «جمله بابک نادرست است.»

- داود : «جمله صمد درست است.»

بازپرس مطمئن است که فقط جمله مجرم نادرست و سایر جملات درست هستند.

سارق چه کسی بود؟



پاسخ در صفحه ۴۶