Institute for Research in Fundamental Sciences

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده فیزیک

کارگاه مدلسازی داده:

Fisher forecast analysis

سیدمحمدصادق موحد

دانشکده فیزیک - دانشگاه شهید بهشتی

پژوهشکده فیزیک، پژوهشگاه دانشهای بنیادی (IPM)

گروه کیهان شناسی محاسباتی (GCC-SBU)

آزمایشگاه میان رشته ای ابن سینا

http://facultymembers.sbu.ac.ir/movahed/

کارگاه مدلسازی داده (شماره ۱)

۹۷/۲/۲۶

Computational Cosmology Group Of Shahid Beheshti University

COMPLEXLAB SHAHID BEHESHTI UNIVERSITY

مهمترین منابع مورد استفاده

Institute for Research in Fundamental Sciences

دانشکده فیزیک

Books:

- Data analysis: A Bayesian Tutorial, by D.S. Sivia & J. Skilling, Oxford science Publication, 2010
- Data reduction and error analysis for the physical sciences, P. R. Bevington & D. K. Robinson, McGrawHill, 2003
- Error of Observations and their Treatment, J. Topping, 1972.
- Practical Physics, G. L. Squires, 1985.
- Data analysis in cosmology, "Lecture notes in physics 665"
- Mathematical statistics with applications, J.E. Freund's, Pearson education, 2005,
- All of Statistics, L. Wasserman, Springer, 2004
- Statistics, R.J. Barlow, Wiley, 2002.
- Introduction to statistics and Data analysis for Physicist, Gerhard Bohm, Günter Zech, 2010.
- Statistics, Data Mining, and Machine Learning in Astronomy: A Practical Python Guide for the Analysis of Survey Data (Princeton Series in Modern Observational Astronomy), Željko Ivezic´, Andrew J. Connolly, Jacob T. VanderPlas, and Alexander Gray, PRINCETON UNIVERSITY PRESS, 2014
- Algebraic Topology of Random Fields and Complexes, Research thesis, Omer Bobrowski, 2012
- Random Fields and Geometry, Adler, R. J., Taylor, Jonathan E., Springer 2007.
- The Geometry of Random fields, Adler, 1981.
- GEOMETRY, TOPOLOGY and Physics, M. Nakahara, 2003
- Topological Complexity of Smooth Random Functions, Robert J. Adler, Jonathan E. Taylor, Springer 2009.

مهمترین منابع مورد استفاده

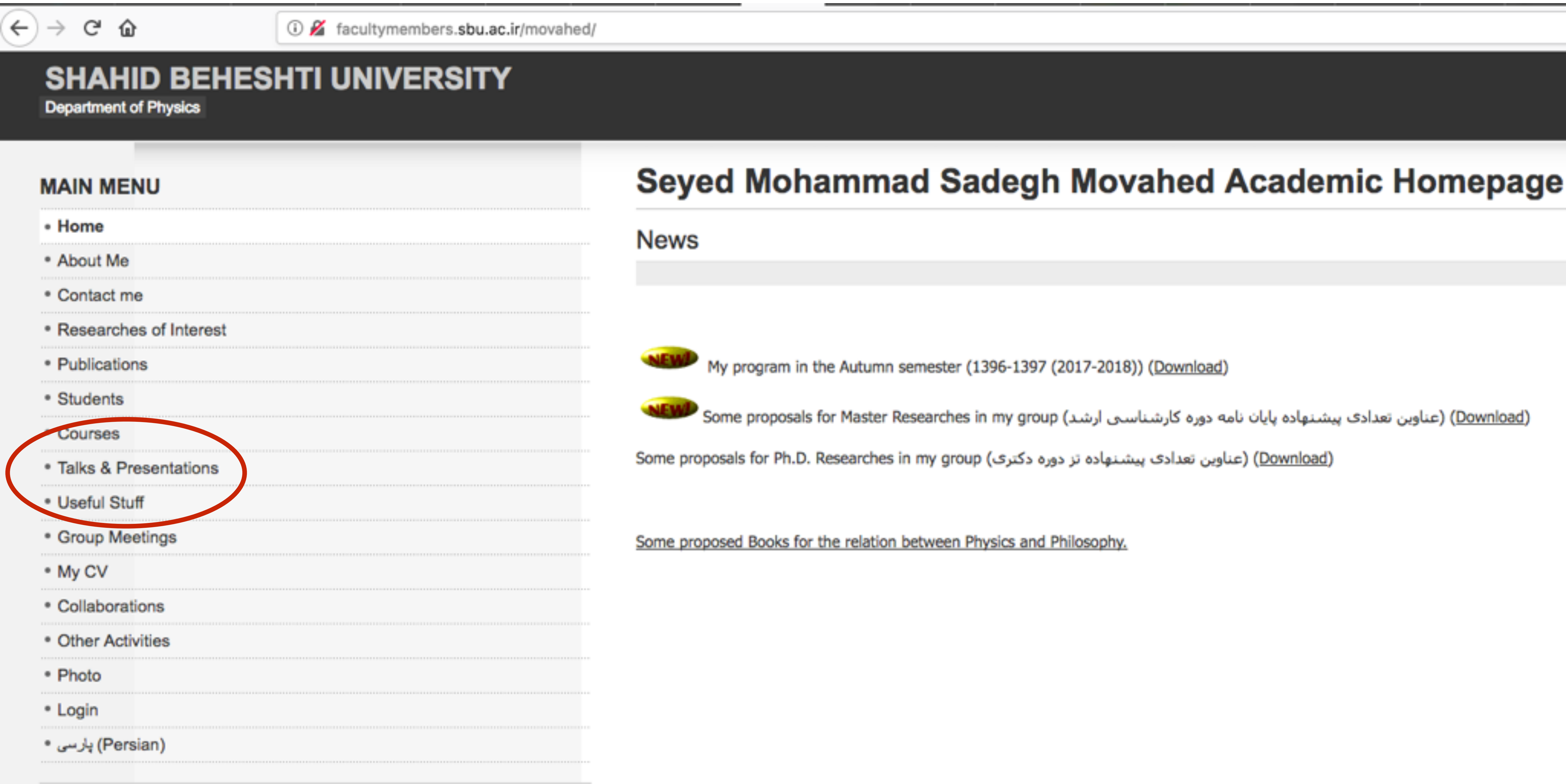
Papers and Lectures:

- Bassett, B. A., Fantaye, Y., Hlozek, R., & Kotze, J. (2011). Fisher matrix preloaded—Fisher4Cast. International Journal of Modern Physics D, 20(13), 2559-2598.
- http://facultymembers.sbu.ac.ir/movahed/

Institute for Research in Fundamental Sciences

مهمترین منابع مورد استفاده

دانشکده فیزیک



Institute for Research in Fundamental Sciences

دانشکده فیزیک

فهرست مطالب

۱) یادآوری و مفاهیم مربوط
۲) ماتریس فیشر و ماتریس کئوواریانس
۳) خطای پارامترها در بیضی گون
۴) خطاهای نامتقارن

Fisher information matrix

مفهوم ماتریس fisher و اهمیت آن:

$$P(x) : \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

$$F \equiv -\left.\frac{\partial^2 \log\left(P(x)\right)}{\partial x^2}\right|_{x=\bar{x}} = \frac{1}{\sigma_x^2} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_x^2 = \sqrt{F^{-1}}$$

$$P(x,y) : \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

$$F_{xx} \equiv -\left.\frac{\partial^2 \log\left(P(x,y)\right)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = \frac{1}{\sigma_x^2} \qquad F_{yy} \equiv -\left.\frac{\partial^2 \log\left(P(x,y)\right)}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = \frac{1}{\sigma_y^2}$$

$$F_{xy} = F_{yx} \equiv -\left.\frac{\partial^2 \log\left(P(x,y)\right)}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = 0 \qquad F = \begin{pmatrix} 1/\sigma_x^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_y^2 \end{pmatrix} \rightarrow F^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

یادآوری

$$D:\{x_i, y_i\} \quad i = 1,\ldots,N$$

$$\Theta:\{\theta_j\} \qquad Y(x;\{\Theta\}) = \sum_{k=1}^{M} \theta_k f_k(x)$$

$$p(\Theta \mid D) = \frac{p(D \mid \Theta)\, p(\Theta)}{\int d\Theta\ p(D \mid \Theta)\, p(\Theta)}$$

$$if \quad p(\Theta) = cts$$

$$p(\Theta \mid D) : \ p(D \mid \Theta)$$

$$p(D \mid \Theta) \equiv \prod_{i=1}^{N} P_i = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(- \frac{\left[y_i - Y(x_i;\{\Theta\}) \right]^2}{2\sigma_i^2} \right)$$

$$\chi^2(\{\Theta\}) \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\left[y_i - Y(x_i;\{\Theta\}) \right]^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left[y_i - \sum_{k=1}^{M} \theta_k f_k(x_i) \right]^2}{\sigma_i^2}$$

$$p(D \mid \Theta) : \ e^{-\frac{\chi^2(\{\Theta\})}{2}}$$

$$p(D\,|\,\Theta) \equiv \prod_{i=1}^{N} P_i = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{\left[y_i - Y(x_i;\{\Theta\}) \right]^2}{2\sigma_i^2} \right)$$

$$\Gamma(D\,|\,\Theta) \equiv \frac{P(D\,|\,\Theta)}{P_{Max}(D\,|\,\Theta_*)} = \exp\left(-\frac{\left[\chi^2(\Theta) - \chi^2_{\min} \right]}{2} \right)$$

$$\log(P(D\,|\,\Theta)) = \log(P(D\,|\,\Theta = \Theta_{Best})) + \sum_{k=1}^{M} (\theta_k - \theta_k^{Best}) \frac{\partial \log(P(D\,|\,\Theta))}{\partial \theta_k}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k,l}^{M} \frac{\partial^2 \log(P(D\,|\,\Theta))}{\partial \theta_k \partial \theta_l} (\theta_k - \theta_k^{Best})(\theta_l - \theta_l^{Best}) + \mathrm{O}(\delta\Theta^3) + \ldots$$

درصورتی که در نظر بگیریم تابع درست نمایی بر حسب پارامترهای آزاد به شکل Gaussian Multivariate باشد. در آن صورت خواهیم داشت:

$$\Gamma(D\,|\,\Theta) = \exp\left(-\frac{\left[\chi^2(\Theta)-\chi^2_{\min}\right]}{2}\right) = \sqrt{\frac{\det[F]}{(2\pi)^M}}\exp\left(-\frac{\delta\Theta^T\bullet\left[F\right]\bullet\delta\Theta}{2}\right)$$

$$\Theta:\{\theta_k\} \qquad k=1,\ldots,M$$

$$\delta\Theta \equiv \Theta-\Theta_{Best}$$

$$\chi^2_{\min} = \chi^2(\Theta=\Theta_{Best})$$

$$\Gamma(D\,|\,\Theta) \sim \exp\left(-\frac{\delta\Theta^T\bullet\left[F\right]\bullet\delta\Theta}{2}\right)$$

$$\Gamma(D\,|\,\Theta) = \sqrt{\frac{\det[F]}{(2\pi)^M}}\exp\left(-\frac{\delta\Theta^T \bullet [F] \bullet \delta\Theta}{2}\right)$$

$$\Theta : \{\theta_k\} \qquad k = 1,\ldots,M \qquad \delta\Theta \equiv \Theta - \Theta_{Best} \qquad \chi^2_{\min} = \chi^2(\Theta = \Theta_{Best})$$

$$\delta\Theta^T \bullet [F] \bullet \delta\Theta = \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} F_{kl}\,\delta\theta_k\,\delta\theta_l$$

$$F_{kl} = -\frac{\partial^2 \log(\Gamma(D\,|\,\Theta))}{\partial\theta_k \partial\theta_l}$$

$$\sigma^2_{\theta_i} = F^{-1}_{ii}$$

$$\sigma^2_{\theta_i\theta_j} = F^{-1}_{ij}$$

بنابراین درصورتی که ماتریس Fisher تعیین گردد می توان خطاها و حوزه اعتبار کمیتهای آزاد مدل را مشخص کرد. پرواضح است که این در چارچوب گوسی گرفتن تابع درست نمایی برای پارامترهای آزاد است.

به غیر از خطاهای مربوط به هر کمیت آزاد در مدل که عناصر قطری در ماتریس معکوس Fisher هستند. همبستگی ها بین دو یا چند کمیت آزاد نیز اهمیت دارد. برای بررسی این موضوع مثلاً فضای دو پارامتری را در نظر می گیریم.

$$\Gamma(D\,|\,\Theta) = \sqrt{\frac{\det[F]}{(2\pi)^M}}\exp\left(-\frac{\delta\Theta^T\bullet\left[F\right]\bullet\delta\Theta}{2}\right)$$

$$\delta\Theta^T\bullet\left[F\right]\bullet\delta\Theta = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}F_{kl}\delta\theta_k\delta\theta_l$$

$$= F_{11}(\theta_1-\theta_1^{Best})^2 + F_{22}(\theta_2-\theta_2^{Best})^2 + 2F_{12}(\theta_1-\theta_1^{Best})(\theta_2-\theta_2^{Best})$$

$$\Gamma(D\,|\,\theta_1) = \int d\theta_2\;\Gamma(D\,|\,\{\theta_1,\theta_2\}) : \;\exp\left(-\frac{(\theta_1-\theta_1^{Best})^2}{2}\times\frac{(F_{11}F_{22}-F_{12}F_{21})}{F_{22}}\right)$$

$$\rightarrow \sigma_{\theta_1}^2 = \frac{F_{22}}{(F_{11}F_{22}-F_{12}F_{21})} = \left(F^{-1}\right)_{11}$$

با کمک بی اثر سازی (Marginalization)

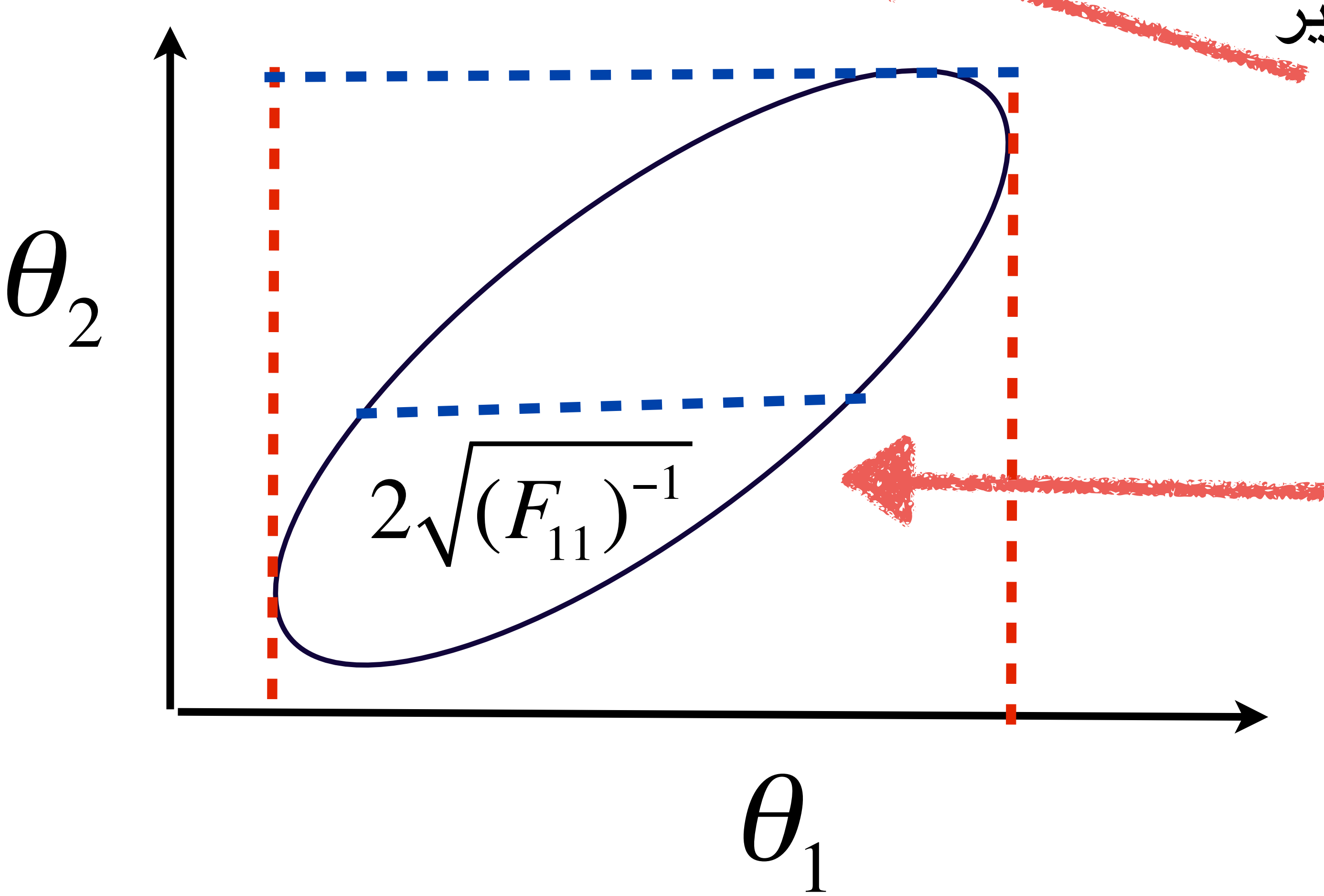
$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta_1}^{-2} & a_{12} \\ a_{21} & \sigma_{\theta_2}^{-2} \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{1}{\left(F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}\right)} \begin{pmatrix} F_{22} & -F_{12} \\ -F_{21} & F_{11} \end{pmatrix}$$

$2\sqrt{(F^{-1})_{11}}$

در حالت دیگر در نظر گرفته شده که با تغییر کمیت θ_1 از مقدار بهینه اش بقیه کمیت ها هم آنقدر تغییر کنند تا تابع Likelihood به مقدار بیشینه اش برسد.

مقدار مربوط به خطای کمیت θ_1 یعنی اگر بقیه کمیتهای آزاد مدل در مقدار بهینه اشان ثابت باشند.



ویژگی های ماتریس فیشر

① Marginalization on arbitrary parameter

$$\mathcal{L}(\theta_1 \ldots \theta_r) = \int \mathcal{L}(\theta_1 \ldots, \theta_M) \underbrace{P(\theta_{r+1} \ldots \theta_M)}_{\text{prior}} \, d\theta_{r+1} \ldots d\theta_M$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{1j} & F_{1M} \\ & & \vdots & \\ F_{j1} & F_{j2} \;\cdots & \cdots & \cdots\; F_{jM} \\ F_{M1} & & F_{Mj} & F_{MM} \end{bmatrix}_{M \times M}$$

حذف سطر و ستون

پارامتر jام

ویژگی های ماتریس فیشر

② Add Prior

$$F_{ii} \longrightarrow F_{ii} + \frac{1}{\sigma_{ip}^2}$$

For Gaussian Prior

③ Add New Data

$$F_{old} \longrightarrow F_{New} = F_{old} + F$$

④ Fixed parameter $\quad F_{ii} \longrightarrow F_{ii} + \frac{1}{\sigma_i^2}$

$$\sigma_i \rightarrow 0$$

ویژگی های ماتریس فیشر

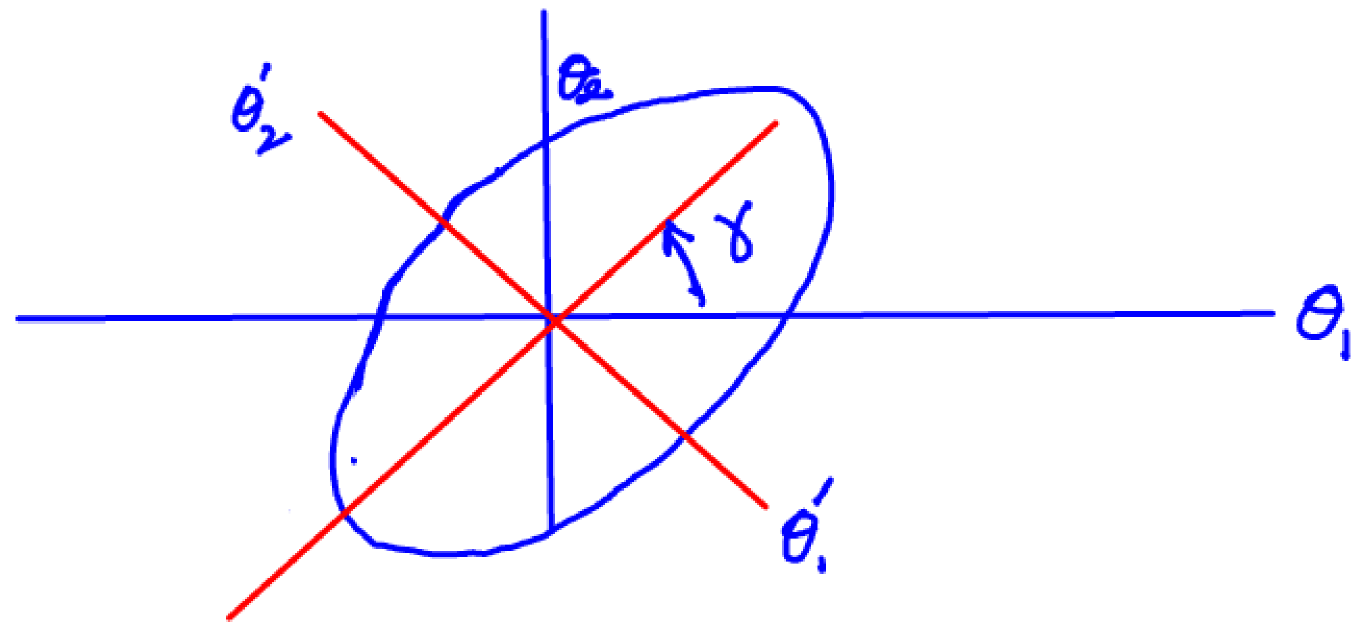
$C = F^{-1}$

for 2×2 $\qquad C = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{12}^2 & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix}$

$$P(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\operatorname{Det} C}} \exp\left(-\frac{\Delta\theta^T . C^{-1} . \Delta\theta}{2}\right)$$

$$\Delta\theta^T . C^{-1} . \Delta\theta = \frac{\delta\theta_1^2}{\sigma_{11}^2} + \frac{\delta\theta_2^2}{\sigma_{22}^2} - \frac{2\rho\,\delta\theta_1\,\delta\theta_2}{\sigma_{11}\sigma_{22}}$$

$$\rho \equiv \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}\sigma_{22}}$$



$$\tan 2\gamma = \frac{2\sigma_{12}^{2}}{(\sigma_{22}^{2} - \sigma_{11}^{2})}$$

$$\text{Probability}\left(\Delta\theta^{T} \cdot F \cdot \Delta\theta \leq \Delta\chi_{\alpha}^{2}\right) = \text{Probability}\left(\Delta\chi^{2} < \Delta\chi_{\alpha}^{2}\right)$$

$$\int_{0}^{\Delta\chi_{\alpha}^{2}} p(\Delta\chi^{2}, n)\, d\Delta\chi^{2} = 1 - e^{-\frac{\Delta\chi_{\alpha}^{2}}{2}} \quad \text{for } n=2$$

$$\alpha = 90\% \Rightarrow 1 - e^{-\frac{\Delta\chi^{2}}{2}} = 0.9 \Rightarrow \Delta\chi_{\alpha}^{2} = 2.146^{2}$$

در واقع معادله یک بیضی گون است که دارای شعاع chi^2است

$$\mathcal{L}(D|\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(C)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\, \delta y \cdot C_y^{-1} \cdot \delta y\right)$$

$$\delta y = y_{exp} - y_{Theory}$$

$$F_{ij} = \left\langle -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_i \, \partial \theta_j} \right\rangle \,, \quad C_y = \langle \delta y \, \delta y^T \rangle$$

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left[C_y^{-1} C_{y,i}\, C_y^{-1} C_{y,j} + C_y^{-1} \langle (\delta y \, \delta y^T)_{,ij} \rangle \right]$$

جمع بندی

۱) ماتریس فیشر و ماتریس کئوواریانس
۲) خطای پارامترها در بیضی گون
۳) خطاهای نامتقارن

Institute for Research in Fundamental Sciences

از توجه شما سپاسگزارم