Computational Cosmology Group
Of Shahid Beheshti University

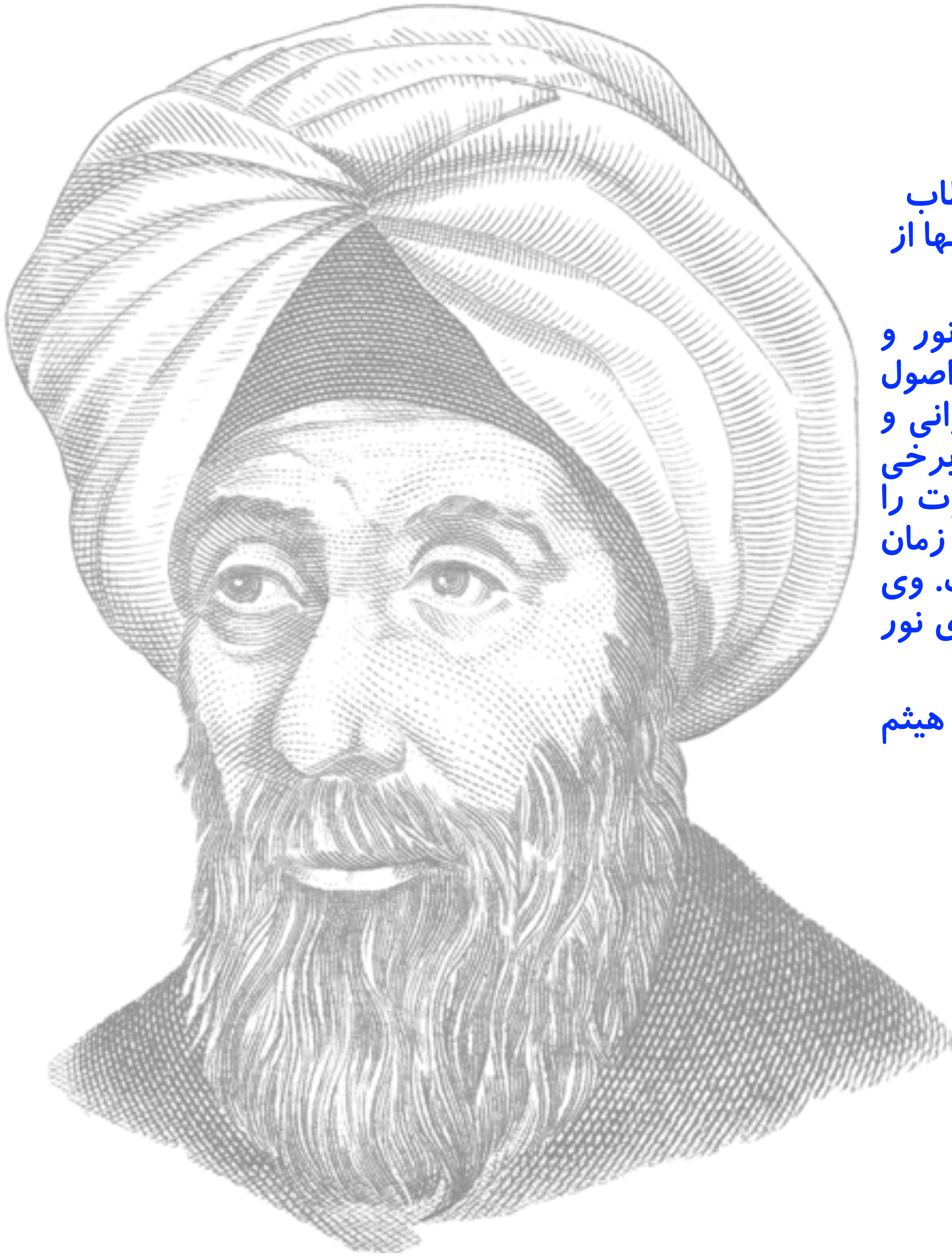
بسم الله الرحمن الرحیم

تخمین و انتشار خطا

Error estimation & propagation

سیدمحمدصادق موحد
دانشکده فیزیک - دانشگاه شهید بهشتی
گروه کیهان شناسی محاسباتی (GCC-SBU)
پژوهشکده فیزیک- پژوهشگاه دانشهای بنیادی (IPM)
www.smovahed.ir

IPM
Institute for Research in Fundamental Sciences



ابن هیثم ۴۳۰ - ۳۵۴ هجری

نیاکان ابن هیثم از شهر دانشگاهی گندی شاپور در زمان ساسانیان و زرتشتی بوده‌اند که پس از حمله اعراب در زمان خلافت عمر بن الخطاب به همراه بسیاری از دانشمندان دیگر مانند خاندان نوبخت و بختیشوعها از گندی‌شاپور کوچ کردند. برخاست. وی اهل خوزستان بود

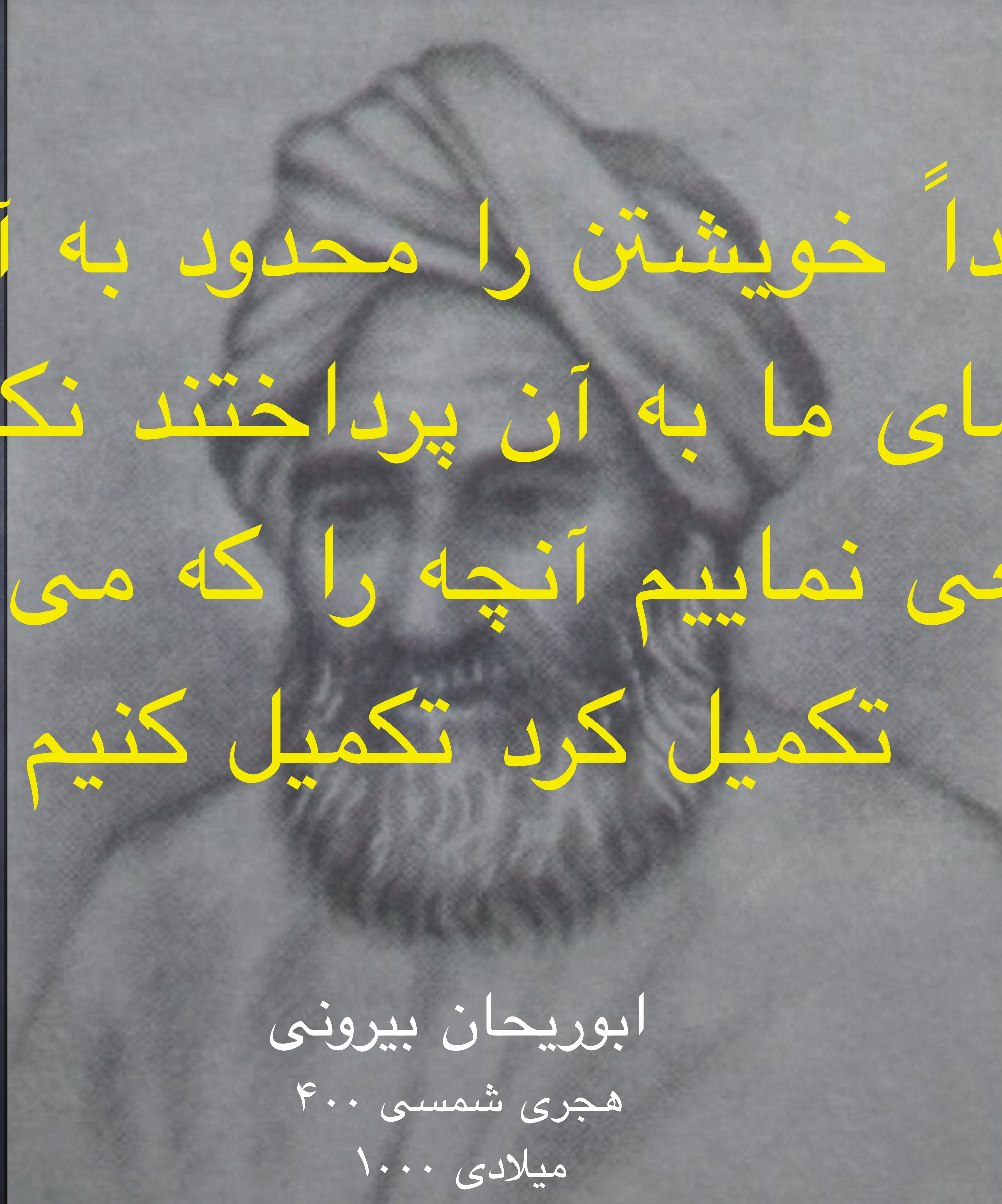
اولین دانشمند فیزیک نور در جهان است که در زمینه شناخت نور و قانون‌های شکست و بازتاب آن نقش مهمی ایفا کرده‌است. شرح اصول اتاقک تاریک و اختراع ذره‌بین از کارهای برجسته این دانشمند ایرانی و مسلمان است که منجر به ساخت دوربین عکاسی گردید. به دید برخی پژوهشگران ابن هیثم نخستین دانشمند جهان است که سرعت صوت را محاسبه کرده‌است. ابن هیثم با معیار متعارف اندازه‌گیری طول در زمان خود، که واحد ذرع بود، سرعت نور و دور کره زمین را اندازه گرفت. وی نخستین کسی است که ۷۰۰ سال قبل از نیوتن به بررسی ویژگی‌های نور پرداخت.

سیارک شماره ۵۹۲۳۹ به افتخار این دانشمند به نام ۵۹۲۳۹ ابن هیثم نامیده شده‌است.

- کتاب المناظر
- مقالهٔ فی صورهٔالکسوف
- رسالهٔ فی مساحهٔ المسجم المکافی
- مقالهٔ فی تربیع الدائرهٔ
- مقالهٔ مستقصاهٔ فی الاشکال الهلالیهٔ
- خواص المثلث من جههٔ العمود
- القول المعروف بالغریب فی حساب المعاملات
- قول فی مساحهٔ الکرهٔ.

Hevelius's *Selenographia*, showing Alhasen [*sic*] representing reason, and Galileo representing the senses.

فهرست



ابداً خویشتن را محدود به آنچه
قدمای ما به آن پرداختند نکنیم و
سعی نماییم آنچه را که می توان
تکمیل کرد تکمیل کنیم

ابوریحان بیرونی

هجری شمسی ۴۰۰

میلادی ۱۰۰۰

جلد یک مجله علمی در دوران طلایی اسلام

پیامبر اکرم(ص)

برخی از مراجع مرتبط

- arXiv:physics/0406120
- Data analysis: A Bayesian Tutorial, by D.S. Sivia & J. Skilling, Oxford science Publication, 2010
- Data reduction and error analysis for the physical sciences, P. R. Bevington & D. K. Robinson, McGrawHill, 2003
- آشنایی با روشهای شبیه سازی در فیزیک. مهدی نیک عمل و امین الله واعظ و امیر لهراسبی. انتشارات علمی۱۳۸۶
- www.smovahed.ir/course/
- Error of Observations and their Treatment, J. Topping, 1972.
- Practical Physics, G. L. Squires, 1985.

برخی از نرم افزارها

- Python: www.python.org
- R: www.r-project.org
- IDL (Interactive Data Language)
- Matlab

نقشه راه

۱) از نقطه نظر تئوری و مدل سازی

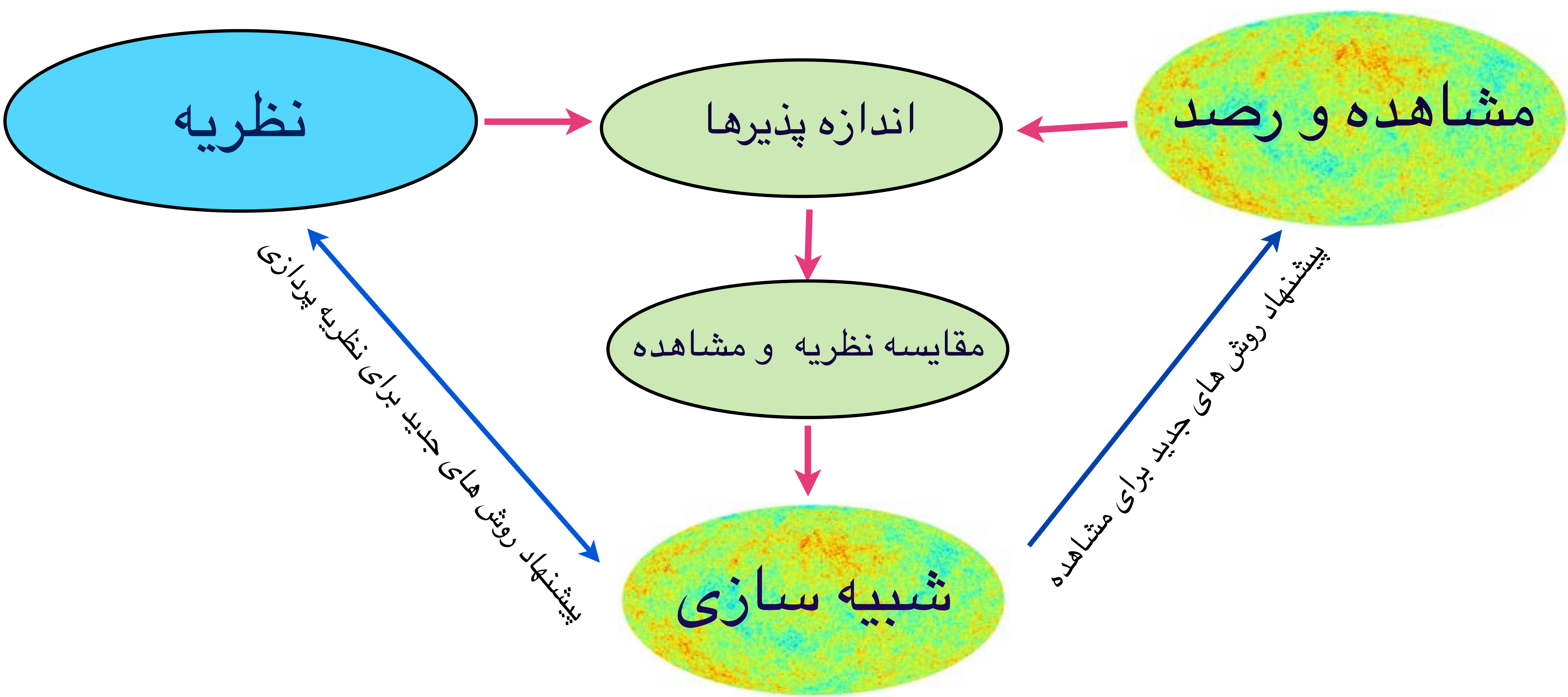
- شناخت ماهیت فرآیندها
- تحول
- البته احتمالاً پیش بینی وضعیت آینده آنها

البته نگرش پذیرش مدل این است که تا حد امکان از نقطه نظر ساختار ریاضی ساده باشد

۲) از نقطه نظر مشاهداتی و اندازه گیری

- برای تایید یا رد یک فرضیه به آن نیازمندیم

Model - Observation - Statistical analysis



مقادیر کمیت ها

در آزمایشها و البته شبیه سازی ها اصلًا انتظار نداریم که مقادیر واقعی کمیت های مورد علاقه را به دست آوریم. چرا؟؟؟؟؟

زیرا:

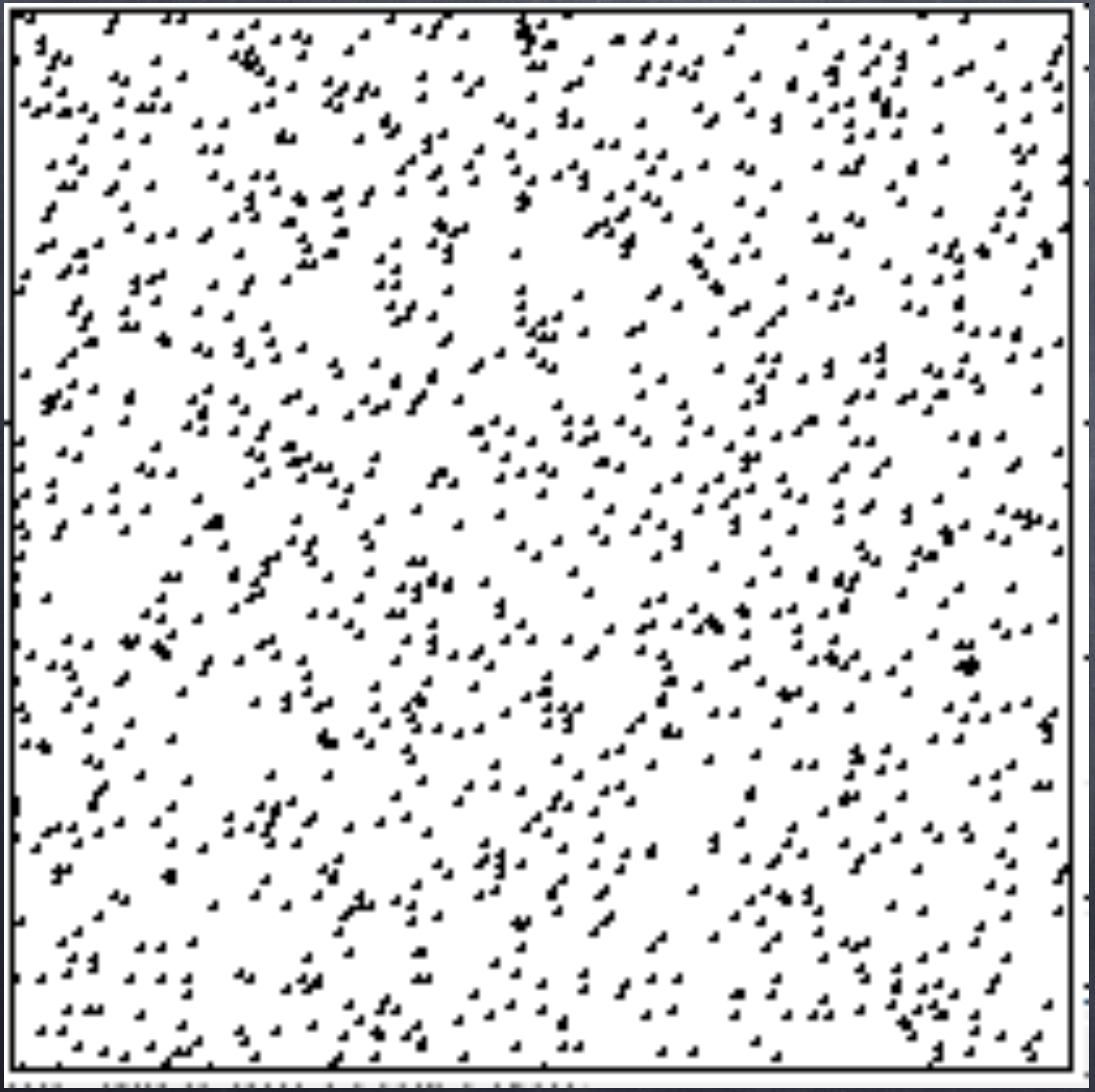
- به سبب محدودیت در وسایل اندازه گیری
- به سبب محدودیت در آزمایش گر
- به سبب محدودیت های ذاتی

پس مقدار واقعی غالباً مخفی است

بنابراین آیا این واقعه اسف بار است یا نه؟

قبل از پاسخ به این سوال به یک نکته توجه کنید

یک مثال ساده



تعداد اتمهای موجود در یک اتاق چقدر است؟

بسته به نوع مسأله دقت لازم برای تعیین مقدار کمیت نیز متفاوت می باشد

http://phys.columbia.edu

حال چه باید کرد؟

- اولین قدم این است که بیاییم و انواع خطاها را بررسی کنیم
- روش تخمین خطاها
- روش گزارش خطاها (مفاهیم احتمال و بازه تطابق)

1) Accuracy: Percentage difference between experimental results and accepted value

2) Reliability: Official scientific homepage is more reliable than private homepage

3) Validity: Derived correctly form premise already accepted

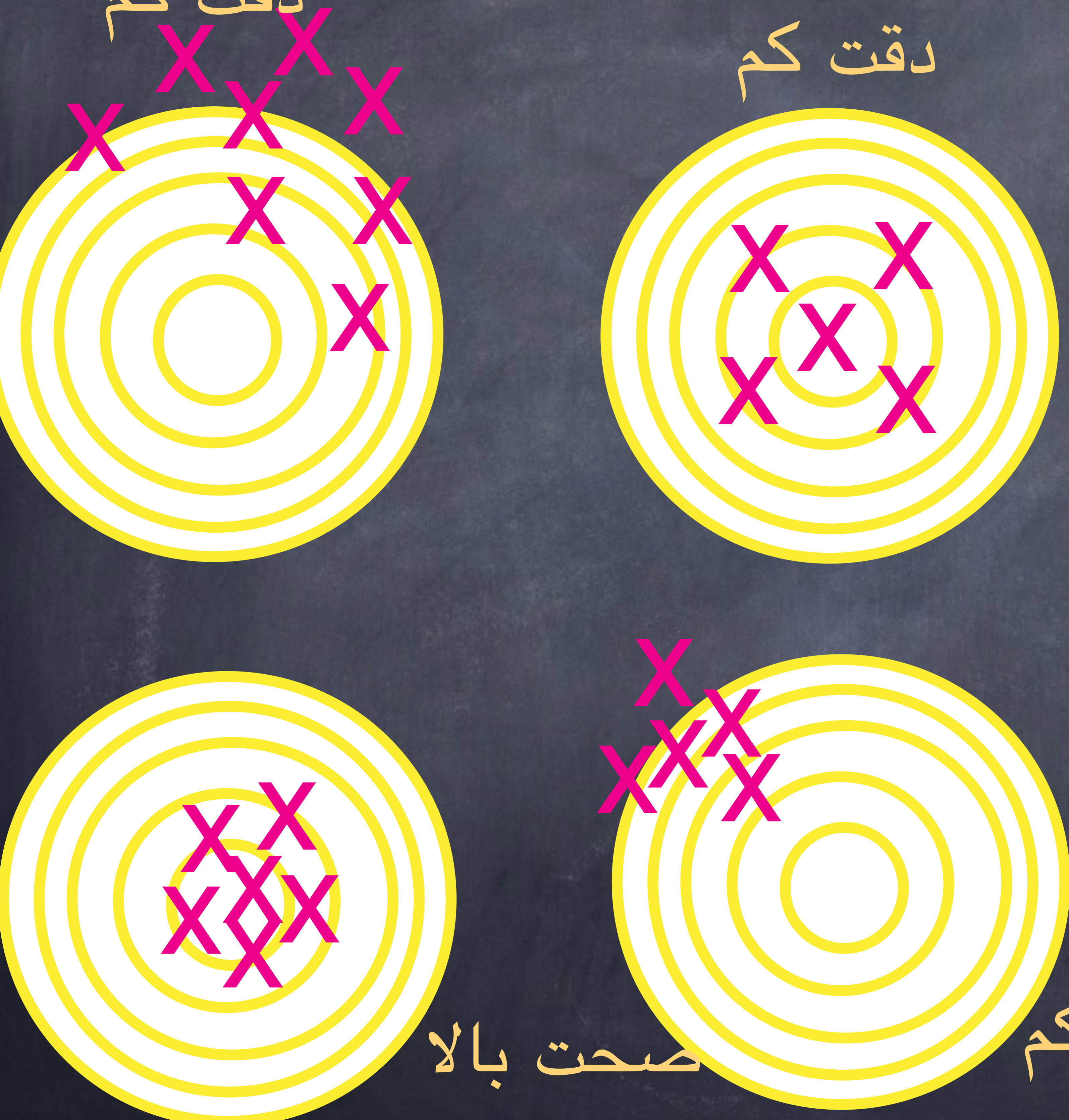
1) Accuracy: Percentage difference between experimental results and accepted value. It can be quantified by percentage relative error

2) Precision: It is refer to the repeatability of the measurement

دو مفهوم مهم

صحت (Accuracy): چقدر دسته اندازه گیری به مقدار واقعی نزدیک تر است

دقت (Precision): چقدر دسته اندازه گیری نسبت به هم پراکندگی دارند



دسته بندی انواع خطاها

۱) خطاهای سیستماتیک

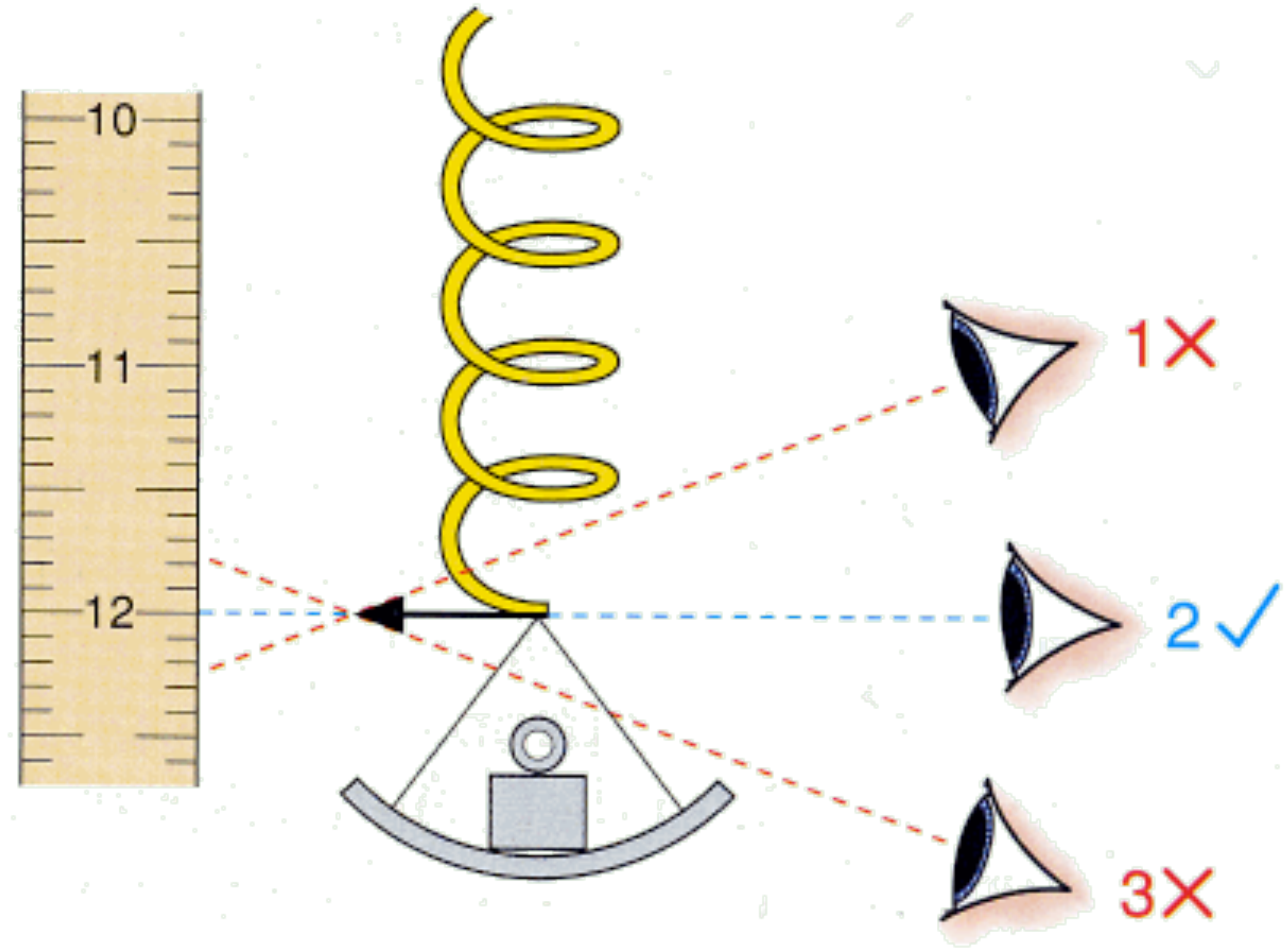
Systematic errors

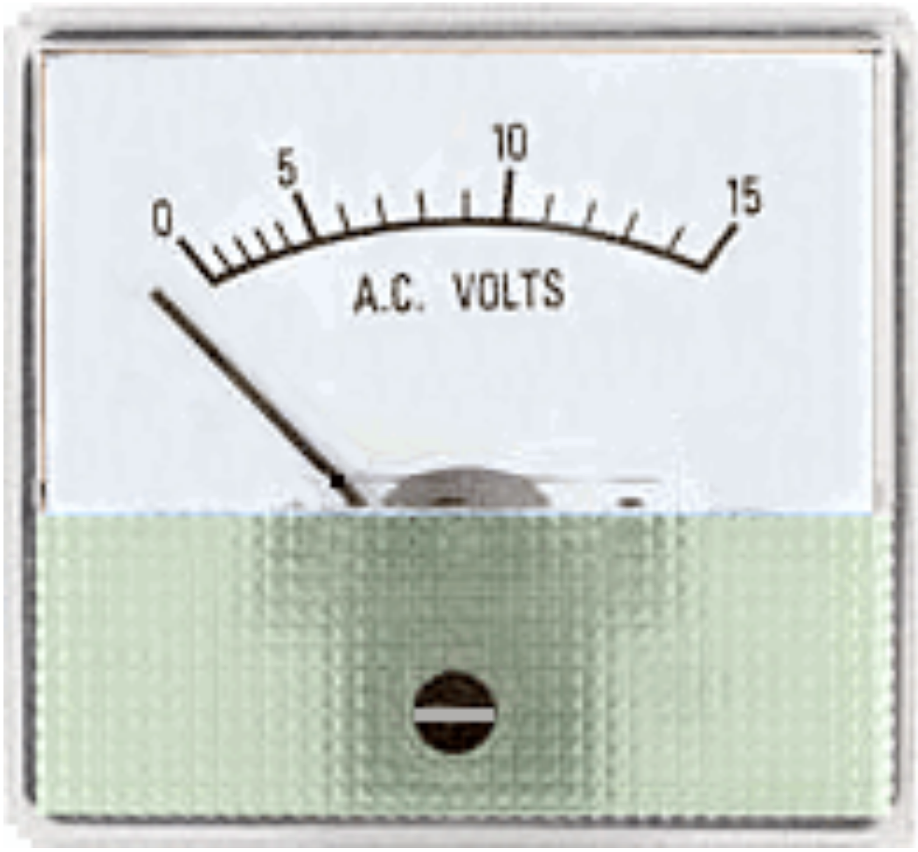
۲) خطاهای کاتوره ای

Random errors

۳) خطاهای لپی

Blunder errors

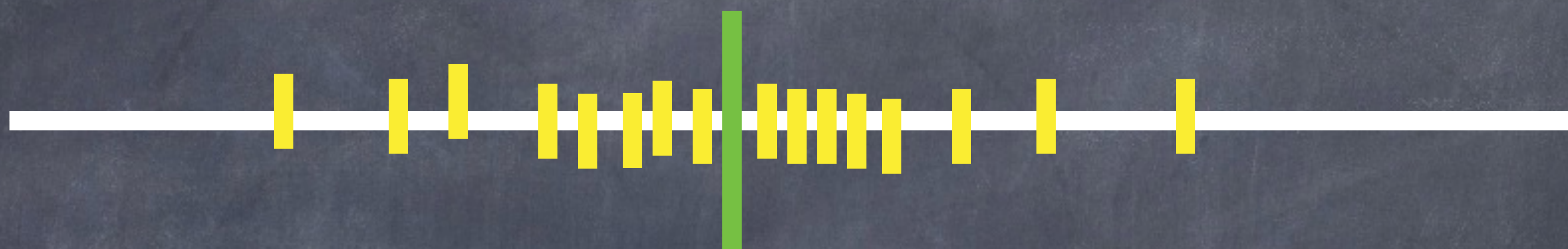




www.physics4u.co.uk

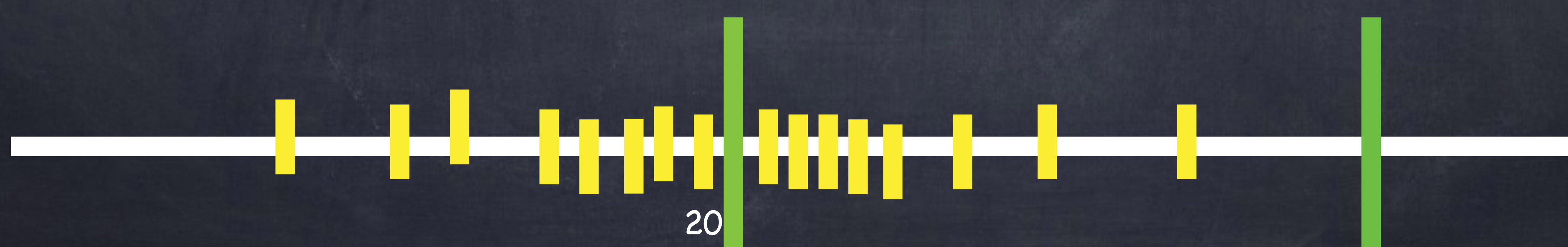
اندازه گیری بدون وجود خطای سیستماتیک

مقدار واقعی



اندازه گیری با وجود خطای سیستماتیک

مقدار واقعی



انواع خطاها در شبیه سازی

۱) خطای سراسری (Global)

۲) خطای گرد کردن (Rounding)

۳) خطای ناشی از مدل بکار گرفته شده در روشهای عددی

Global error

خطای موضعی

$$f(x) = f(x_0) + \Delta x f'(x = x_0) + \mathrm{O}(\Delta x^2)$$

$$\Delta x = \frac{x_{final} - x_{initial}}{N} \rightarrow N \sim \mathrm{O}(\Delta x^{-1})$$

$$N \times \mathrm{O}(\Delta x^2) = \mathrm{O}(\Delta x)$$

خطای سراسری

گزارش خطا

$$\left\{ x_1, x_2, \ldots, x_N \right\}$$

$$x = \bar{x} \pm \sigma_m \qquad x = \bar{x}_{-\sigma_m^-}^{+\sigma_m^+}$$

تحلیل متقارن

تحلیل نامتقارن

به سبب وابستگی غیر خطی

the 68.3% central confidence level interval

محاسبه خطا ۱

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$$

$$e_i = x_i - X$$ مقدار واقعی

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - X)^2 \equiv e^2$$

$$x_i \to x_i \pm \sigma$$ خطا در یک تک اندازه گیری

محاسبه خطا ۲

آنسامبلی که حاوی مقادیر
متوسط هر ریز حالت است

$$\left\{ \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N \right\}$$

$$E_i = \bar{x}_i - X = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(x_{ij} - X \right) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e_{ij}$$

$$E_i^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N} e_{ij}^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1;k\neq j}^{N} e_{ij}e_{ik}$$

$$\left\langle E^2 \right\rangle_{ens} = \frac{1}{N}\left\langle e^2 \right\rangle_{ens} \rightarrow \sigma_m^2 \equiv \left\langle E^2 \right\rangle_{ens} = \frac{\sigma^2}{N}$$

دو مشکل مهم

۱) مقدار واقعی معلوم نیست (X)

۲) فقط یک ریز حالت داریم

$$
\begin{aligned}
d_{ij} &\equiv x_{ij} - \bar{x}_i = e_{ij} - E_i \\
e_{ij} &\equiv x_{ij} - X, \qquad E_i \equiv \bar{x}_i - X \\
S_i^2 &\equiv \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} d_{ij}^2 \\
S_i^2 &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e_{ij}^2 - \frac{2E_i}{N}\sum_{j=1}^{N} e_{ij} + E_i^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e_{ij}^2 - E_i^2 \\
&= \sigma_i^2 - E_i^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle S_i^2 \rangle &= \langle \sigma_i^2 \rangle - \langle E_i^2 \rangle \\
&= \sigma^2 - \sigma_m^2 \qquad \sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{N} \\
\sigma^2 &= \frac{N}{N-1} \langle S_i^2 \rangle \qquad \sigma_m^2 = \frac{1}{N-1} \langle S_i^2 \rangle \\
S &\sim \langle S_i^2 \rangle \\
\sigma &\sim \left(\frac{N}{N-1} \right)^{1/2} S \\
\sigma_m &\sim \left(\frac{1}{N-1} \right)^{1/2} S \\
\sigma &\sim \left(\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2 \right)^{1/2} \\
\sigma_m &\sim \left(\frac{1}{(N-1)N} \sum_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

گزارش خطا

$$\left\{x_1, x_2, \ldots, x_N\right\}$$

$$x = \bar{x} \pm \sigma_m$$

$$\sigma_m^2 = \sigma_{stat.}^2 + \sigma_{sys}^2$$

the 68% central confidence level interval

درصد خطای نسبی

این خطا در واقع بدون بعد است و معیاری از قابل اعتماد بودن اندازه گیری ها است

$$\Delta_x^{(R)}\% \equiv \frac{\sigma_m}{\bar{x}} \times 100$$

$$> 10$$

اندازه گیری ها بدون دقت کافی است

$$< 10$$

اندازه گیری ها قابل قبول است

$$< 1 \sim 2$$

اندازه گیری ها خیلی خوب است.
این حالت معمولاً در آزمایشگاه های معمولی
به دست نمی آید

داستانی در مورد ارقام بامعنا

Significance Number

0.001	1
0.01	1
1.0	2
1.00	3
35,000	2

۱) در جمع و تفریق کمترین اعشار

۲) در ضرب و تقسیم کمترین رقم بامعنا

۳) تعداد ارقام بامعنای اعداد خاص که توسط شرایط آزمایشگاه یا شبیه سازی تعیین می شوند بی نهایت است

Factor	Name	Symbol
10	yotta	Y
10	zetta	Z
10	exa	E
10	peta	P
10	tera	T
10	giga	G
10	mega	M
10	kilo	k
10	hecto	h
10	deka	da

Factor	Name	Symbol
10	deci	d
10	centi	c
10	milli	m
10	micro	μ
10	nano	n
10-12	pico	p
10-15	femto	f
10-18	atto	a
10-21	zepto	z
10-24	yocto	y

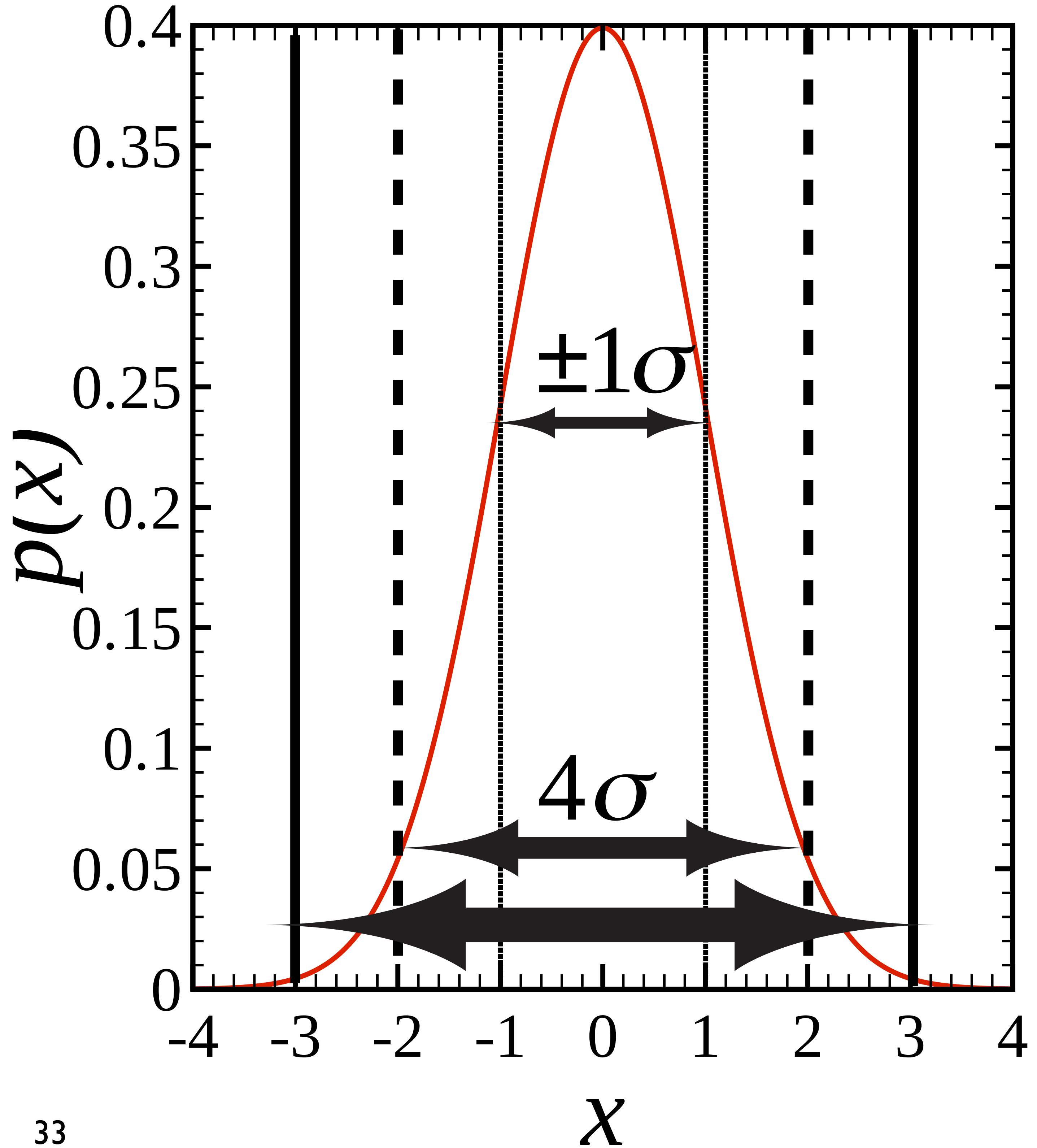
مفهوم انحراف معیار با توجه به تابع توزیع

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$$68.3\%=\int_{-1\sigma}^{+1\sigma}p(x)dx$$

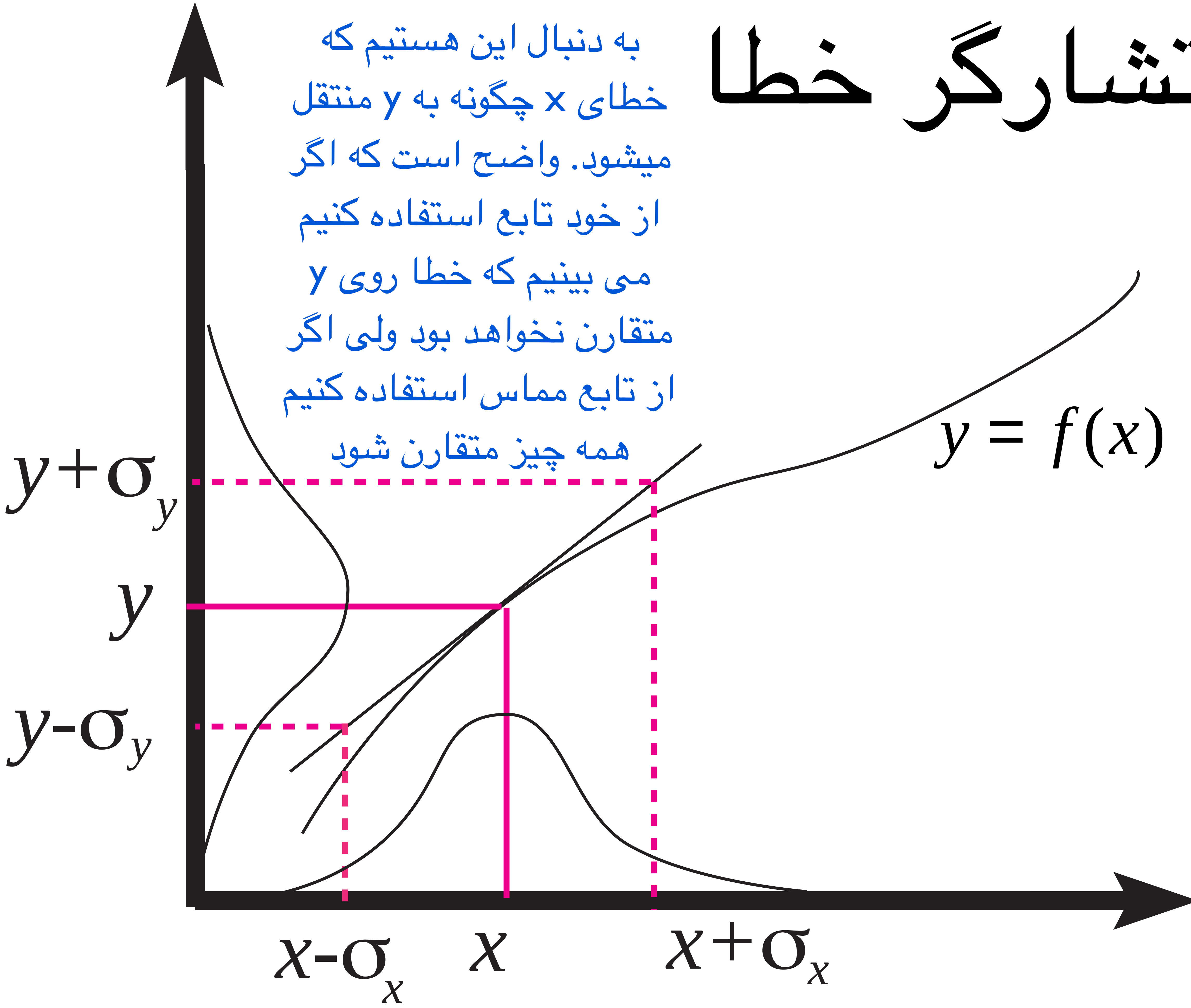
$$95.45\%=\int_{-2\sigma}^{+2\sigma}p(x)dx$$

$$99.73\%=\int_{-3\sigma}^{+3\sigma}p(x)dx$$

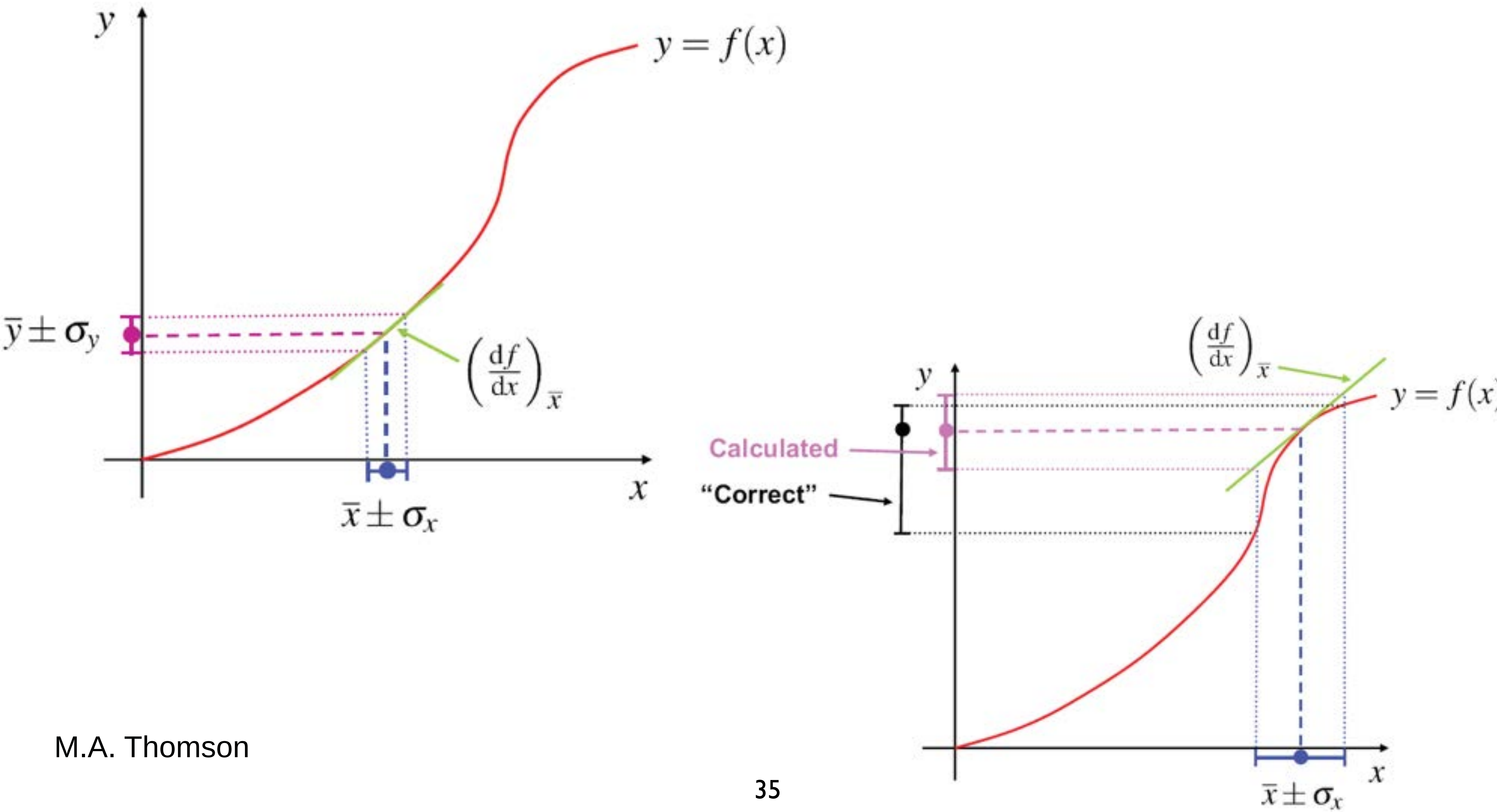


انتشارگر خطا

به دنبال این هستیم که
خطای x چگونه به y منتقل
میشود. واضح است که اگر
از خود تابع استفاده کنیم
می بینیم که خطا روی y
متقارن نخواهد بود ولی اگر
از تابع مماس استفاده کنیم
همه چیز متقارن شود



عدم استفاده از خطا در مرتبه دوم بسط



M.A. Thomson

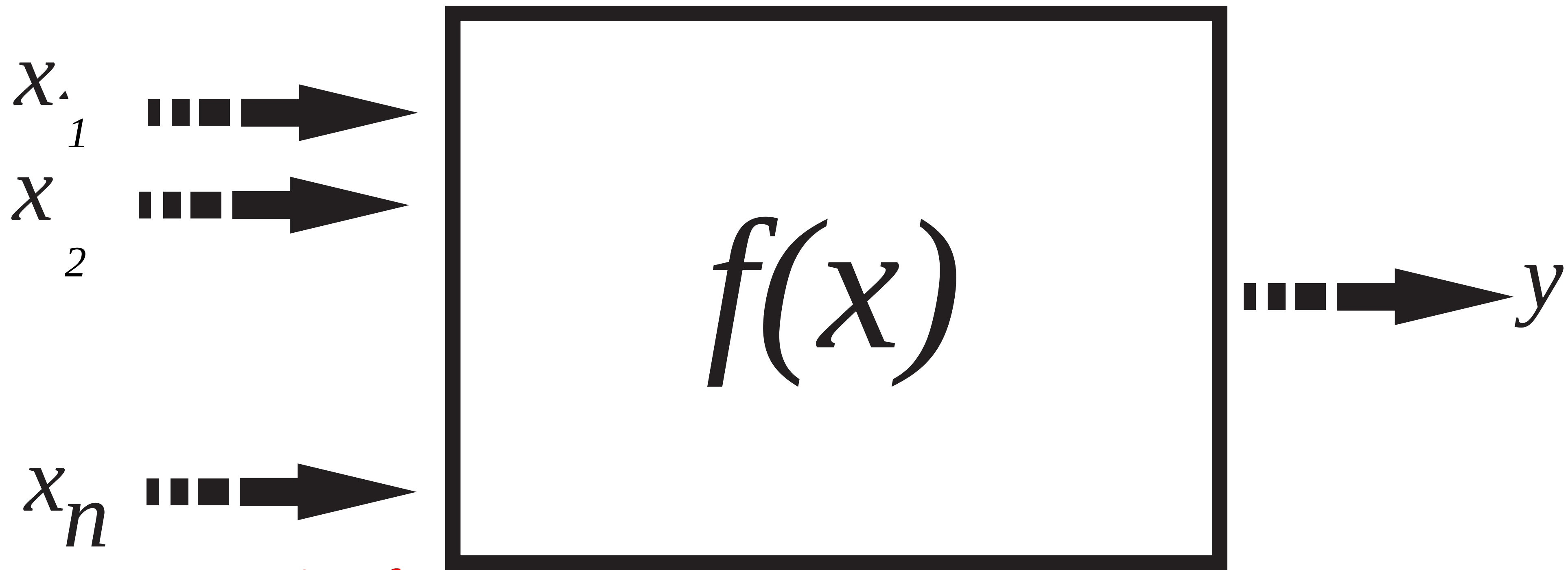
انتشارگر برای تک متغیره

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right) + \mathrm{O}(\Delta x^2)$$

$$\sigma_{my}^2 \equiv \left\langle \left[f(x) - f(x_0) \right]^2 \right\rangle = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \sigma_{mx} \right)^2$$

توجه شود که در این جا فرض کردیم که خطاها به صورت گوسی و متقارن هستند

انتشارگر خطا برای چند متغیره

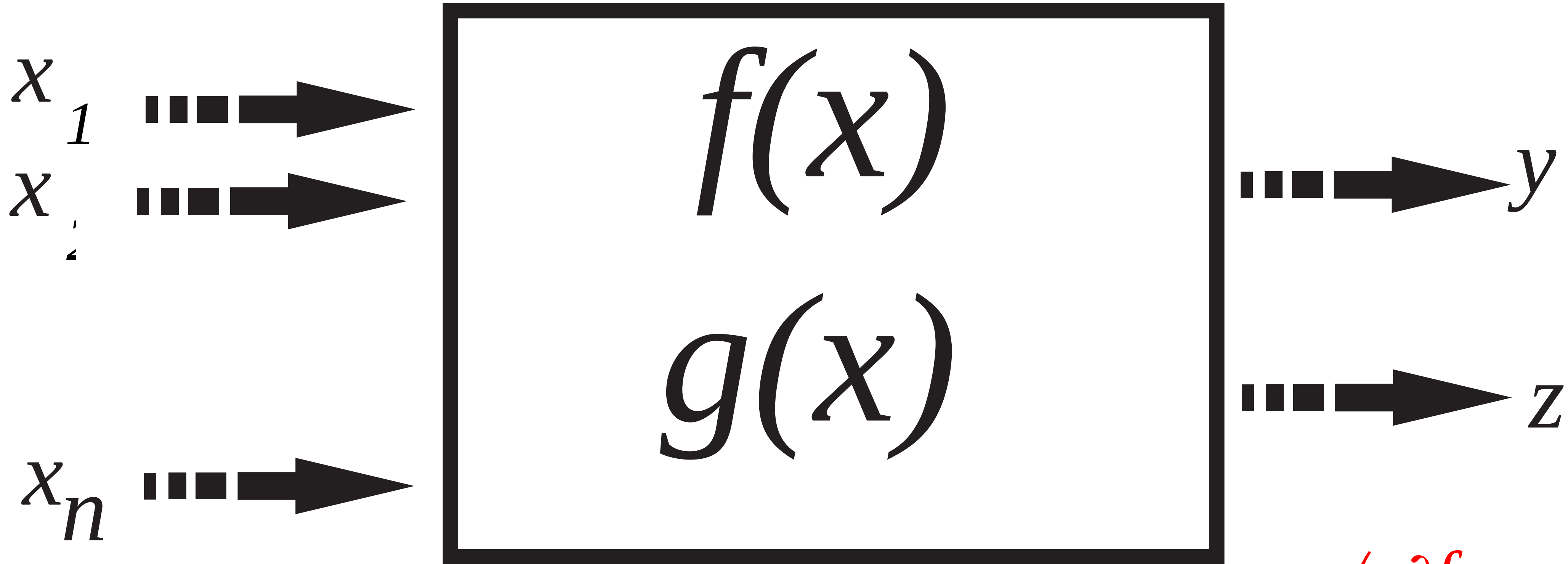


$$f(x_1,\dots,x_n) = f_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + \mathrm{O}(\Delta^2) = f_0 + \Re\Delta X$$

$$\sigma_{mf}^2 \equiv \left\langle \left[f(x_1,\dots,x_n) - f_0 \right]^2 \right\rangle = \Re C \Re^T = \sum_j^n \sum_i^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\sigma_{mij}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{mii}^2 + \sum_i^n \sum_{j\neq i}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\sigma_{mij}^2$$

$$COV \rightarrow C \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{m11}^2 & \cdots & \sigma_{m1n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{mn1}^2 & \cdots & \sigma_{mnn}^2 \end{pmatrix} \quad \Re \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$\sigma_{mf}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_{m11}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\sigma_{m22}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\sigma_{m33}\right)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\left\langle [x_1 - x_{10}][x_2 - x_{20}] \right\rangle + \dots$$



$$\sigma_{YZ}^2 \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{yy}^2 & \sigma_{yz}^2 \\ \sigma_{zy}^2 & \sigma_{zz}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{m11}^2 & \cdots & \sigma_{m1n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{mn1}^2 & \cdots & \sigma_{mnn}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{yy}^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{mii}^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma_{mij}^2$$

$$\sigma_{yz} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_{mii}^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \sigma_{mij}^2$$

برای انتشارگر غیر گوسی مقادیر
راست و چپ متفاوت خواهد بود .
روش استاندارد برای بررسی این
موضوع استفاده از تابع
likelihood است

چند نمونه

$$y = ax \pm bz \quad \rightarrow \quad \sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_z^2 \pm 2ab\sigma_{xz}^2$$

$$y = axz \quad \rightarrow \quad \sigma_y^2 = a^2z^2\sigma_x^2 + a^2x^2\sigma_z^2 + 2a^2xz\sigma_{xz}^2$$

$$y = \pm\frac{ax}{z} \quad \rightarrow \quad \sigma_y^2 = \left[\frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_z^2}{z^2} - 2\frac{\sigma_{xz}^2}{xz}\right]y^2$$

$$y = a\ln(\pm bx) \quad \rightarrow \quad \sigma_y^2 = a^2\frac{\sigma_x^2}{x}$$

متوسط و خطا در اندازه گیری های وزن دار متقارن

$$x_1 \pm \sigma_1$$

$$x_2 \pm \sigma_2$$

$$x_3 \pm \sigma_3$$

.

.

.

$$x_n \pm \sigma_n$$

به دست آید x احتمال اینکه مقدار متوسط

$$P(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

$$\frac{dP(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0 \rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i}\right)^2 \rightarrow \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right)}$$

۱) فرض شده که اندازه گیری های مختلف مستقل از هم باشند

۲)تابع توزیع هر اندازه گیری حول مقدار متوسط گوسی باشد(حد مرکزی)

متوسط و خطا در اندازه گیری های وزن دار نامتقارن

$$x(1)^{+\sigma_1^+}_{-\sigma_1^-}$$

$$x(2)^{+\sigma_2^+}_{-\sigma_2^-}$$

$$x(3)^{+\sigma_3^+}_{-\sigma_3^-}$$

.

.

.

$$x(n)^{+\sigma_n^+}_{-\sigma_n^-}$$

$$P(\overline{x}) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i;\sigma_i^{(\pm)},\overline{x})$$

$$\frac{dP(\overline{x})}{d\overline{x}} = 0$$

$$\sigma_{\overline{x}}^{(\pm)2} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{(\pm)2}\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i}\right)^2$$

۱) فرض شده که اندازه گیری های مختلف مستقل از هم باشند

۲) تابع توزیع هر اندازه گیری حول مقدار متوسط متقارن نیست. در صورتی که این تابع توزیع معلوم باشد با بیشینه کردن تابع احتمال درست نمایی و استفاده از تابع انتشارگر خطا به نتیجه دست پیدا می کنیم.

مثال: فرض کنید که در یک آزمایش دو کمیت به صورت زیر محاسبه شده اند.
می خواهیم مقدار متوسط و انحراف معیار را برای کمیت ثانویه محاسبه کنیم
ضمناً تابع توزیع احتمال این کمیت های اولیه معلوم نیست.

$$x_{-\sigma_x^-}^{+\sigma_x^+} \quad y_{-\sigma_y^-}^{+\sigma_y^+} \quad z = x + y \quad \rightarrow \bar{z} = ?, \sigma_z^{(\pm)2} = ?$$

$$\sigma \equiv \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2}, \quad \alpha \equiv \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{2}, \quad A \equiv \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-}$$

$$x \equiv \sigma u + A\sigma u^2 \quad P(u) = G(u;1,0), \quad P(x) = \frac{G(u;1,0)}{\left|\frac{dx}{du}\right|}$$

$$\langle x \rangle = \alpha, \quad \langle x^2 \rangle = \sigma^2 + 3\alpha^2, \quad \langle x^3 \rangle = 9\alpha\sigma^2 + 15\alpha^3$$

$$\mu \equiv x_0 + \langle x \rangle = x_0 + \alpha, \quad V \equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma^2 + 2\alpha^2$$

$$S \equiv \langle x^3 \rangle - 3\langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 2\langle x \rangle^3 = 6\sigma^2\alpha + 8\alpha^2$$

با داشتن مقادیر خطاها برای دو مختصه می توان میو و وی و اس را به دست آورد سپس با ترکیب این کمیتها مقادیر جدید آنها را برای متغیر سوم به دست می آوریم و با حرکت معکوس متوسط و خطاهای بالا و پایین را برای z به دست می آید

تابع درست نمایی(Likelihood)

این تابع لزوماً برای کمیت های آزاد به صورت تحلیلی معلوم نیست ولی برای آن مدلهایی پیشنهاد شده است arXiv:physics/0406120

اگر با کمک یک مشاهده به دسته اندازه گیری مشخص رسیدیم و بخواهیم از آن به کمیت ثانویه ای برسیم در این صورت تابع درست نمایی کمیت ثانویه در حالت کلی مستقل از ارتباط بین کمیت های اولیه و ثانویه به صورت زیر خواهد بود:

در این عبارت فقط فرض شده که متغیرهای اولیه مستقل از هم باشند

$$\ell(z) = \prod_{i=1}^{n} \ell_i(x_i) \qquad and \quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\ell_i(x_i) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \overline{x}_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

در حالت خاص و با توجه به قضیه حد مرکزی می توان نوشت:

خطای نامتقارن (Asymmetric)

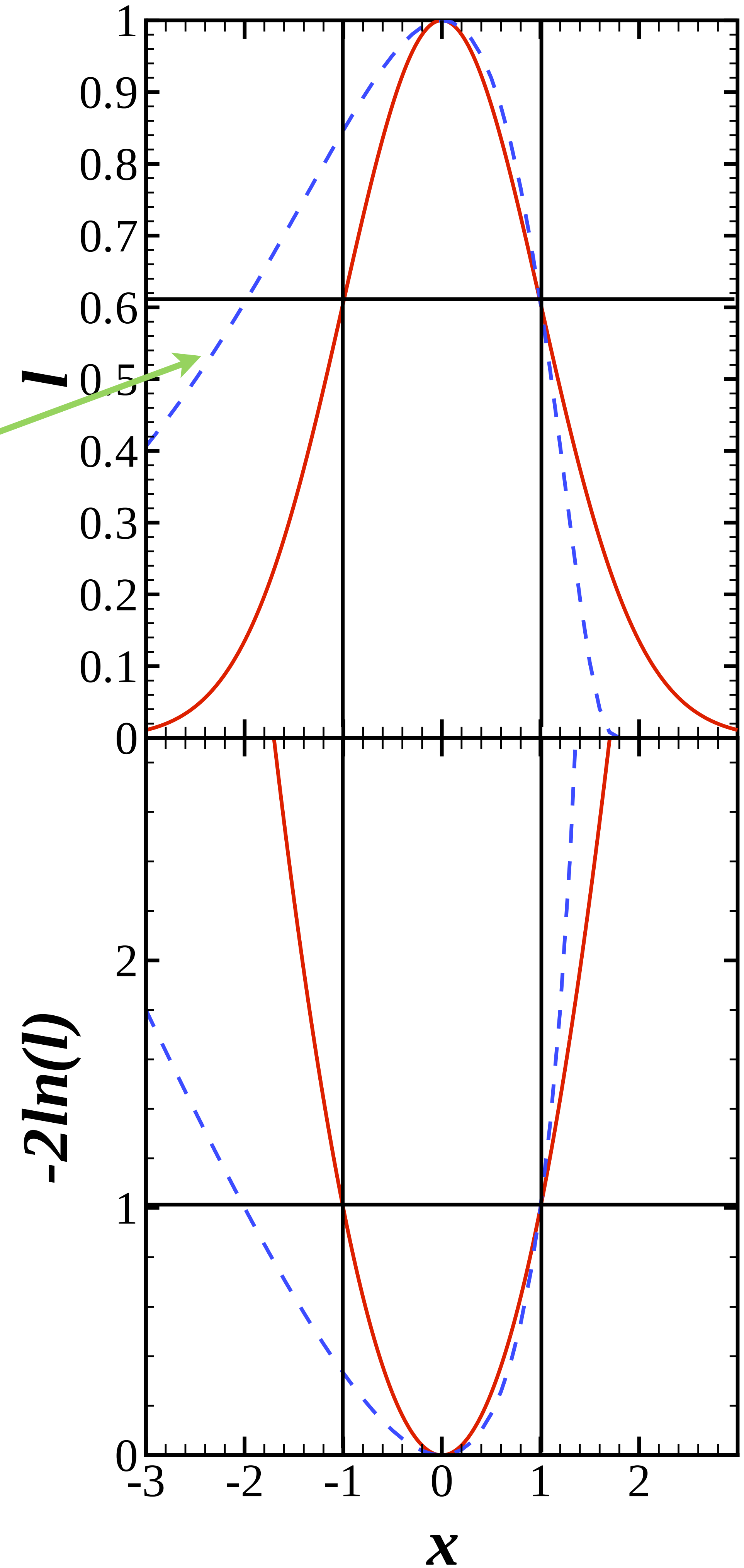
$$\ell \equiv \exp\left(\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)$$ برای حالت متقارن

$$x_{best} = \bar{x}^{+\sigma_1}_{-\sigma_2} \qquad x_{best} = 0^{+1}_{-2}$$

$$-\ln \ell(x) \equiv \frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_1\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)(x-\bar{x})}$$

$$-\ln \ell(x = +\sigma_1) = \frac{1}{2}$$

$$-\ln \ell(x = -\sigma_2) = \frac{1}{2}$$



محدودیت این نوع پارامتری کردن:

مخرج نباید منفی شود

arXiv:physics/0406120

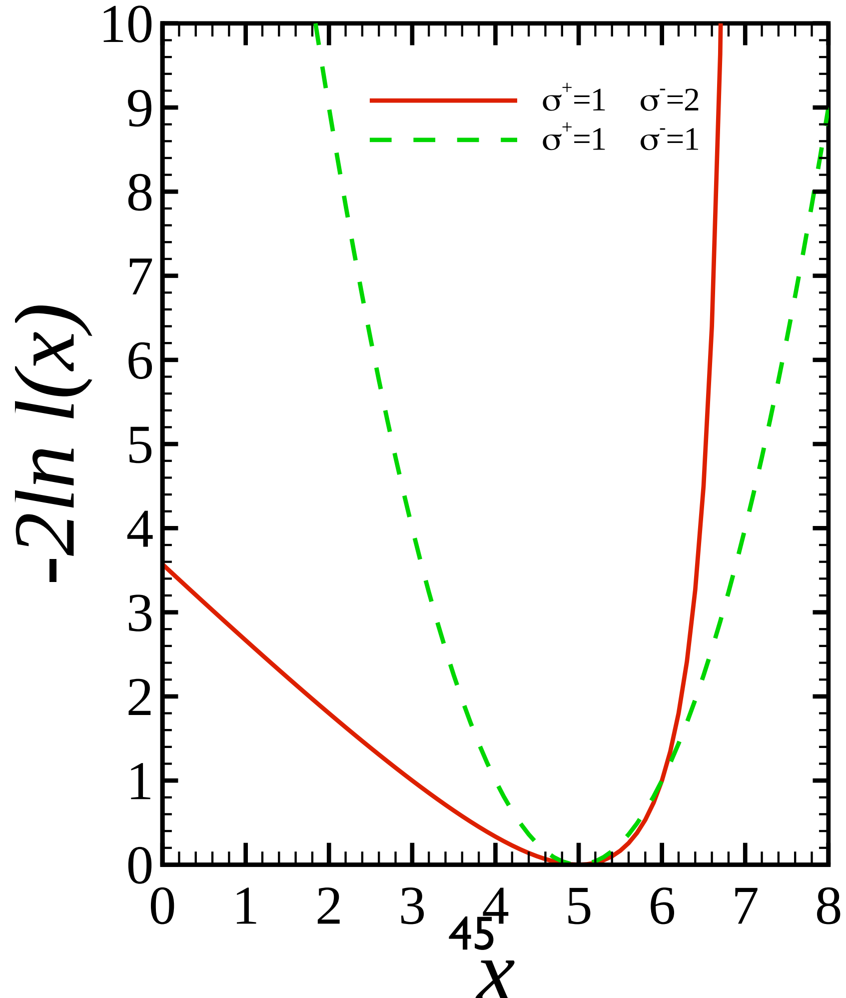
$$z = x + y \qquad x = \bar{x}^{+\sigma_x^+}_{-\sigma_x^-} \qquad y = \bar{y}^{+\sigma_y^+}_{-\sigma_y^-}$$

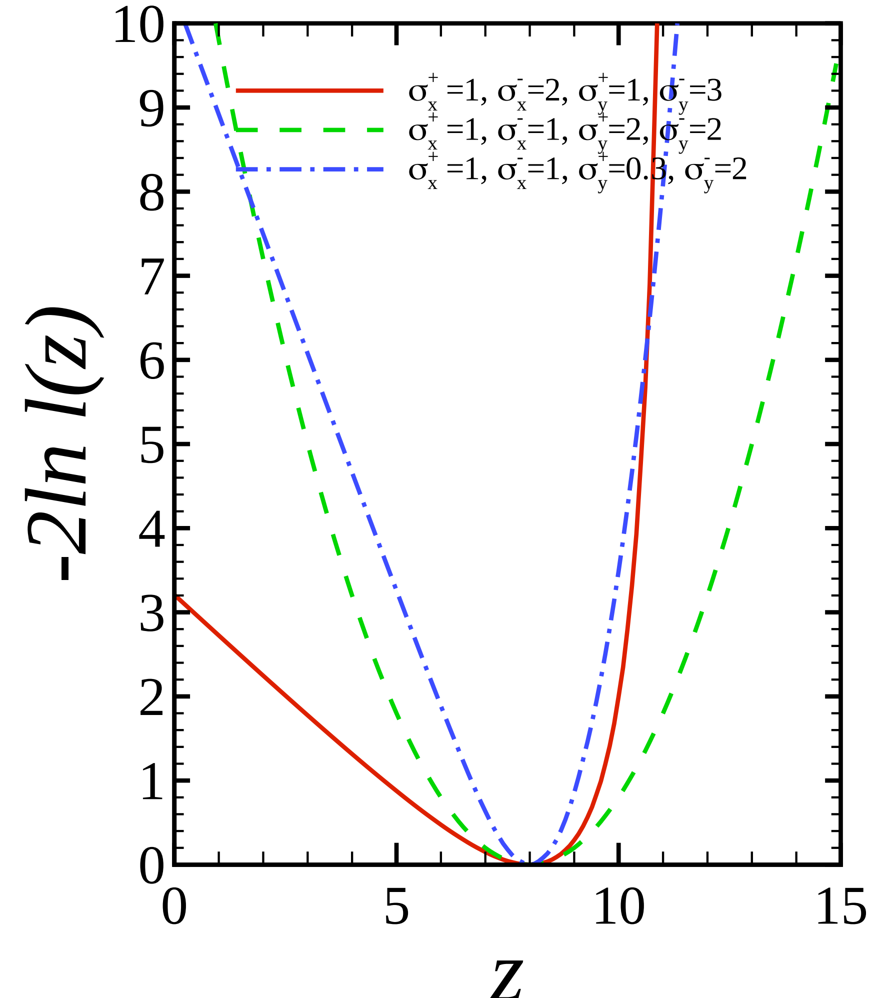
$$-\ln \ell(x,y) \equiv \frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^+\sigma_x^- + (\sigma_x^+ - \sigma_x^-)(x-\bar{x})} + \frac{1}{2}\frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^+\sigma_y^- + (\sigma_y^+ - \sigma_y^-)(y-\bar{y})}$$

$$-\ln \ell(z,x) \equiv \frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^+\sigma_x^- + (\sigma_x^+ - \sigma_x^-)(x-\bar{x})} + \frac{1}{2}\frac{(z-x-\bar{y})^2}{\sigma_y^+\sigma_y^- + (\sigma_y^+ - \sigma_y^-)(z-x-\bar{y})}$$

$$-\ln \ell(z) = \int -\ln \ell(z,x)dx = \frac{1}{2}\frac{(z-\bar{z})^2}{\sigma_z^+\sigma_z^- + (\sigma_z^+ - \sigma_z^-)(z-\bar{z})}$$

$$z \rightarrow \bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$$





برازش تابع با داده ها

$$(x_i, y_i), \quad x_i \pm \sigma_{x_i}, \quad y_i \pm \sigma_{y_i} \tag{1}$$

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - Y_{theo.}(x_i)]^2}{\sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2}, \quad Y_{theo.}(x) = mx + c \tag{2}$$

$$\chi^2(m = m_{best}, c = c_{best}) = \chi^2_{min} \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial m} = \frac{\partial \chi^2}{\partial c} = 0 \tag{3}$$

$$-2\sum_{i=1}^{N} y_i x_i + 2m\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + 2c\sum_{i=1}^{N} x_i = 0 \tag{4}$$

$$-2\sum_{i=1}^{N} y_i + 2m\sum_{i=1}^{N} x_i + 2c = 0 \tag{5}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}, \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{6}$$

$$c = \bar{y} - m\bar{x}, \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \tag{7}$$

گزارش خطا ۱

$$
\begin{aligned}
\sigma_m^2(pro.) &= \left(\frac{\partial m}{\partial y_i}\sigma_{y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\sigma_{x_i}\right)^2 \\
\sigma_m^2(total) &= \sigma_m^2(pro.) + \sigma_m^2(stat.) \\
\sigma_m^2(stat.) &= ?
\end{aligned}
$$

۱) خطای مربوط به(x,y)
که منتشر میشود
۲) خطای ذاتی آماری

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{N}\xi_i y_i, \quad D \equiv \sum_{i=1}^{N}\xi^2, \quad \xi_i \equiv x_i - \bar{x}, \quad \sum_{i=1}^{N}\xi_i = 0 \\
y &= mx + c \quad \to \quad y_i = m(\xi_i + \bar{x}) + c, \quad b \equiv m\bar{x} + c = \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1} N y_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_m^2(stat.) &= \left(\frac{\partial m}{\partial y_i}\sigma_{y_i}\right)^2 = \frac{\xi_1^2}{D^2}\sigma_{y_1}^2 + \frac{\xi_2^2}{D^2}\sigma_{y_2}^2 + \ldots, \quad \sigma_{y_i}^{\equiv}\sigma^2(stat.) \\
\sigma_m^2(stat.) &= \frac{\sum\xi_i^2}{D^2}\sigma^2(stat.) = \frac{D}{D^2}\sigma^2(stat.) = \frac{\sigma^2(stat.)}{D} \\
\sigma_b^2(stat.) &= \frac{\sigma^2(stat.)}{N}, \quad \sigma_c^2(stat.) = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right)\sigma^2(stat.)
\end{aligned}
$$

گزارش خطا ۲

$$\sigma^2(stat.) = \frac{N}{N-2}\langle S^2\rangle$$

$$S^2 \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i^2, \qquad d_i \equiv y_i - (m\xi_i + b)$$

$$\sigma_m^2(stat.) = \frac{1}{D}\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N} d_i^2$$

$$\sigma_c^2(stat.) = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right)\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N-2}$$

گزارش خطا در برازش خطی

$$(x_i, y_i), \quad y = mx + c$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}, \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$c = \bar{y} - m\bar{x}, \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\sigma_m^2(stat.) = \frac{1}{D}\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N} d_i^2$$

$$\sigma_c^2(stat.) = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right)\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N-2}$$

جمع بندی

۱) خطاها
۲) انحراف معیار و انحراف معیار میانگین
۳) انتشارگر خطا
۴) خطاهای نامتقارن و مدل پیشنهادی
۵) برازش داده ها با مدل خطی

پایان