بسمه تعالی

امتحان میان‌ترم اول درس مکانیک آماری پیشرفته ۱

۴ آذر ۱۴۰۰

شرافت‌نامه

اینجانب متعهد می‌شوم تنها از منابع مجاز و با رعایت قوانین حاکم بر ارزشیابی‌های دروس و بر اساس دانش و آموخته‌های خودم، در این امتحان شرکت می‌کنم. در صورتی که مشخص شود که در هر بخش از این امتحان از منابع غیرمجاز استفاده کرده باشم، تبعات آن را کاملاً می‌پذیرم و مدیون خواهم بود و استاد درس مجاز است مطابق مقررات گزارش آن را به مراجع ذی‌ربط برای اقدام مقتضی، ارسال نماید و هر تصمیمی که در خصوص وضعیت من اتخاذ کند می‌پذیرم.

امضاء

منابع مجاز:

(آ) دست‌نوشته‌های استاد درس.
(ب) کتب و منابع برخط متناسب با موضوع درس.

سوالات

۱ معادله‌ی کلازیوس‌ـ کلاپیرون

هدف این معادله، توصیف میزان تغییرات فشار نسبت به دما در نقطه‌ی جوش است. برای به دست آوردن آن، اول یک ماشین کارنو را در نظر بگیرید که از ۱ مول آب استفاده می‌کند. در چشمه‌ی گرم (P, T) گرمای نهان جوش به میزان L به سیستم تزریق می‌شود و آب را تبخیر می‌کند. اینکار با افزایش حجم به میزان V همراه است. پس از آن، فشار به صورت بی‌دررو کم می‌شود تا به $P - dP$ برسد. در چشمه‌ی سرد $(P - dP, T - dT)$ بخار دوباره چگال شده و به آب تبدیل می‌شود.

(آ) نشان دهید که کار خروجی ماشین برابر است با $W = VdP + \mathcal{O}(dP^2)$ و با کمک آن معادله‌ی کلازیوس‌ـ کلاپیرون را به دست آورید:

$$\left.\frac{dP}{dT}\right|_{boiling} = \frac{L}{TV}\,. \qquad (۱)$$

(ب) فرض کنید که L، (تقریبا) مستقل از دماست و تغییرات حجم تماما مربوط به بخار است. بخار را نیز یک گاز کامل در نظر بگیرید. از معادله‌ی ۱ انتگرال بگیرید تا فشار را بر حسب دما به دست آورید.

(پ) به دلیل وجود نیروی گرانش، فشار هوا به ارتفاع از زمین بستگی دارد. با اعمال قانون سوم نیوتن روی یک تیغه‌ی هوا (گاز کامل) به ضخامت dh، معادله‌ای برای فشار در ارتفاع h به دست آورید. (نیاز به محاسبه‌ی جرم و درصد تک تک مولکول‌های هوا نیست، می‌توانید یک جرم متوسط به آن‌ها نسبت دهید.)

۲ کار انجام شده در یک سیستم بسته

نشان دهید در یک سیستم که با محیط تبادل انرژی دارد ولی تبادل ماده نه، حداقل کار انجام شده برابر است با

(آ) افزایش انرژی آزاد هلمهولتز در حالتی که دما و فشار ثابت‌اند.

(ب) افزایش انرژی آزاد گیبس در حالتی که دما و فشار ثابت‌اند.

۳ انبساط آزاد

یک بادکنک حاوی گاز کامل به حجم V_1 را در اتاقی خالی به حجم V_2 می‌ترکانیم. افزایش آنتروپی گاز را بین دو حالت بیان شده، حساب کنید. نشان دهید این فرآیند برگشت‌ناپذیر است. (اتاق را یک سیستم بسته در نظر بگیرید که هیچ برهمکنشی با محیط بیرون ندارد.)

۴ آنتروپی سیاهچاله

یک سیاهچاله، ناحیه‌ای از فضاست که در آن، گرانش آنقدر قوی است که هیچ چیز، حتی نور، نمی‌تواند از آن فرار کند. در نتیجه، انداختن یک جسم درون سیاهچاله یک فرآیند برگشت‌ناپذیر است. هم به معنای روزمره‌ی آن هم به این معنا که اضافه کردن جرم به سیاهچاله آنتروپی آن را افزایش می‌دهد. به نظر می‌رسد که با نگاه از بیرون، هیچ راهی وجود ندارد که بتوان تشخیص داد یک سیاهچاله از چه نوع موادی تشکیل شده (لااقل در ساده‌ترین نوع سیاهچاله که بار و تکانه زاویه‌ای آن صفر است). در نتیجه آنتروپی یک سیاهچاله، باید بزرگتر از آنتروپی هر نوع ماده‌ای که می‌توانسته آن را تشکیل دهد باشد. با دانستن این موارد، تخمین آنتروپی یک سیاهچاله کار سختی نیست.

(آ) با استفاده از تحلیل ابعادی، نشان دهید شعاع یک سیاهچاله باید از مرتبه‌ی GM/c^2 باشد. که در آن، G ثابت جهانی گرانش، c، سرعت نور و M جرم سیاهچاله است. پس از آن، شعاع حدودی یک سیاهچاله هم‌جرم خورشید را محاسبه کنید ($M = 2 \times 10^{30}\ kg$).

(ب) برای اینکه یک سیاهچاله را از حداکثر تعداد ذره‌ی ممکن بسازیم، باید ذراتی با حداقل انرژی ممکن را انتخاب کنیم. یعنی فوتون‌ها (یا ذرات بدون جرم دیگر) با بالاترین طول موج ممکن. البته طول موج این فوتون‌ها نمی‌تواند از اندازه‌ی سیاهچاله بزرگتر باشد. با مساوی قرار دادن مجموع انرژی فوتون‌ها با انرژی سیاهچاله (راهنمایی: رابطه اینشتین) حداکثر تعداد فوتون‌های تشکیل دهنده‌ی آن را حساب کنید. حالا با کمک این نتیجه، آنتروپی یک سیاهچاله را به دست آورید. نتیجه‌ی شما بجز یک ضریب $8\pi^2$ باید با فرمول دقیق آنتروپی سیاهچاله (که از محاسباتی بسیار پیچیده‌تر به دست می‌آید) همخوانی داشته باشد:

$$S_{b.h.} = \frac{8\pi^2 GM^2}{hc} k\,. \qquad (۲)$$

آنتروپی یک سیاهچاله با جرم خورشید را به دست آورید.

۵ گرمای ویژه

گرمای ویژه یک گاز ایده‌آل به صورت $C_V = Nf(T)$ داده شده است. انرژی آزاد هلمهولتز، انرژی داخلی گاز، آنتروپی و پتانسیل شیمیایی را حساب کنید.

ابداً خویشتن را محدود به آن‌چه قدمای ما بدان پرداخته‌اند نکنیم و سعی نماییم آن‌چه را می‌توان تکمیل کرد، تکمیل کنیم. (ابوریحان بیرونی، قرن ۴ هجری)

موفق باشید
موحد