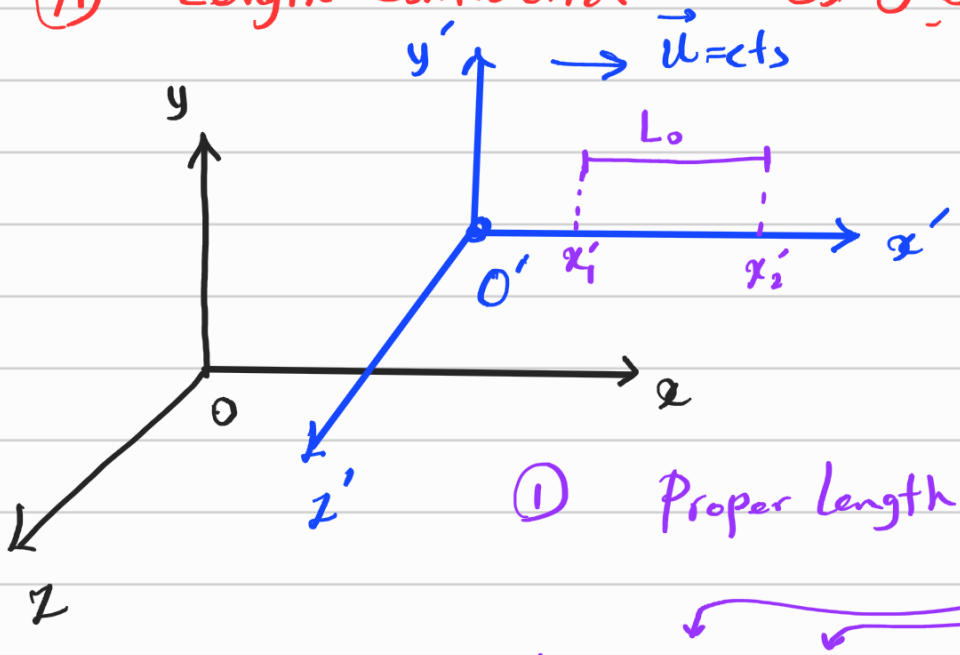
بسم الله الرحمن الرحيم

Some Consequences of Lorentz Transformation

(A) Length Contraction انقباض طول



① Proper Length $L_0 = x_2' - x_1'$

$L = x_2 - x_1$ → اندازه‌گیری همزمان باید انجام شود

② Lorentz Transformation

$$x_1' = \frac{x_1 - u t_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$x_2' = \frac{x_2 - u t_2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$t_1 = t_2$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$\underbrace{x_2' - x_1'}_{L_0} = \gamma \underbrace{(x_2 - x_1)}_{L}$$

L_0

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0 = L_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

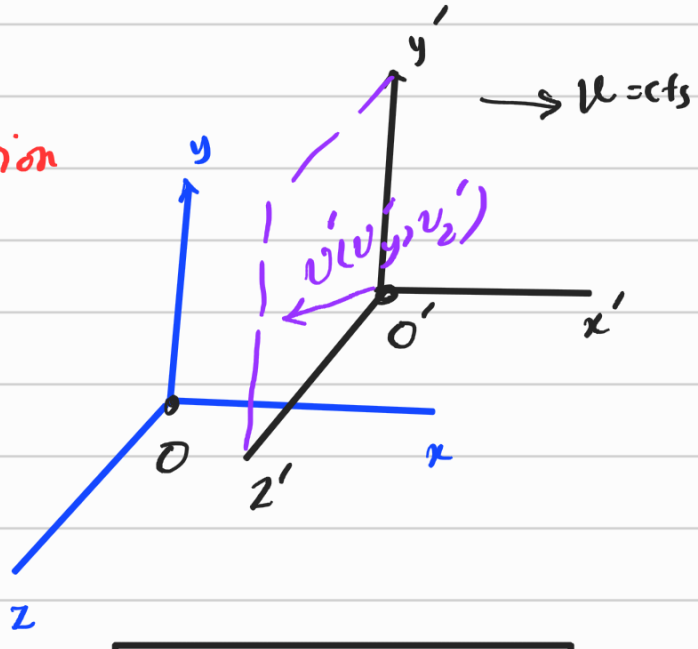
$\sqrt{1 - u^2/c^2} < 1$

$L < L_0$

(B) Velocity Transformation

$v_0 : (v_x, v_y, v_z)$

$v_{0'} : (v_x', v_y', v_z')$



$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2} \longrightarrow v_x = \frac{v_x' + u}{1 - v_x' u/c^2}$$

$$v_y' = ? = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{y_2' - y_1'}{t_2' - t_1'} \longrightarrow v_y$$

$$v_y' = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{y_2' - y_1'}{t_2' - t_1'} = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{y_2 - y_1}{\left(t_2 - \frac{u x_2}{c^2}\right)\gamma - \left(t_1 - \frac{u x_1}{c^2}\right)\gamma}$$

t_2' $\qquad$ t_1'

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \left[\Delta t \gamma - \Delta x (u/c^2)\gamma\right]$$

$$v_y' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t\,\gamma - \Delta x\, u/c^2\,\gamma} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - v_x u/c^2}$$

$$v_y' = \frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - v_x u/c^2}$$

سرعت های عرضی با سرعت طول دستخوش شده است

$$v_z' = \frac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - v_x u/c^2}$$

معنی فیزیکی این تبدیل را بررسی کنیم ←

$$v_y = \frac{v_y'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + v_x' u/c^2}$$

فرض کنید جسم در مختصات O' دارای سرعت (v_x', v_y', v_z')

$$v_z = \frac{v_z'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + v_x' u/c^2}$$

مختصات O نیز با سرعت u در راستای x در حال حرکت است

فرض کنید $v_x' = 0$

$$v_y = v_y'\sqrt{1-u^2/c^2}$$

$$v_z = v_z'\sqrt{1-u^2/c^2}$$

در پدیده های انتشار زمان

زیرا در رابطه های محور x حرکت (u) هیچ انقباض طولی نداریم

$$(t, x, y, z) \longrightarrow (\underbrace{ict}, x, y, z)$$

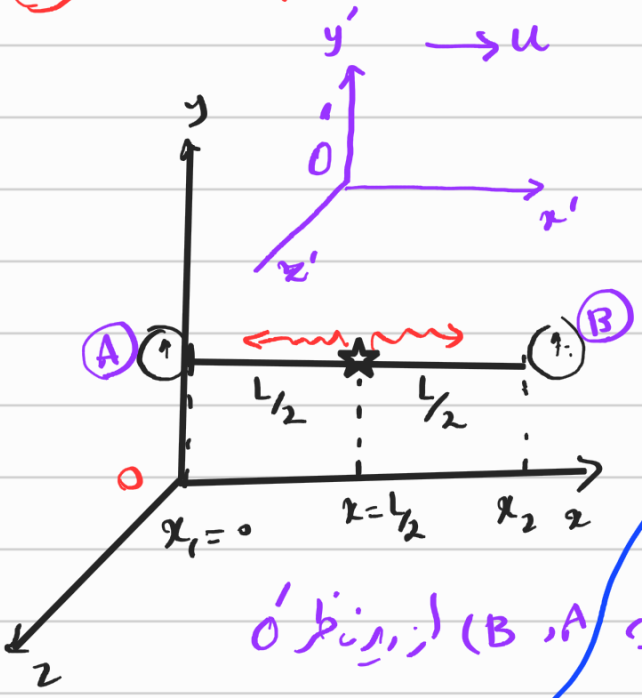
$t = ict$

$$\Delta S^2 = \mp(c\Delta t)^2 \pm (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) \quad \Delta S^2 =$$

با این فرض $\rightarrow$ x_2, y_2, z_2, t_2

© Synchronization هم‌زمانی



$(x_1, t_1) = (0, \frac{L}{2c})$

$(x_2, t_2) = (L, \frac{L}{2c})$

این اتفاق (رسیدن پالس‌های نوری به A و B) از دید ناظر O چگونه است؟

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{t_1 - 0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = (L/2c)\gamma$$

$$t_2' = \frac{t_2 - u/c^2\, x_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\frac{L}{2c} - \frac{u}{c^2}L}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\boxed{t_2' = \frac{L}{2c}\left[1 - \frac{2u}{c}\right]\gamma}$$

$$\boxed{t_1' = \frac{L}{2c}\gamma}$$

$t_2' < t_1'$

از دید O، B سریع‌تر اتفاق را مشاهده می‌کند

این عدم هم‌زمانی از دید ناظر O هیچ ارتباطی به اتساع زمان ندارد زیرا ساعت‌های A و B

از نظر A به اندازه دوبار اتساع زمان دارد بلکه این اتفاق بین عدم قرارگیری

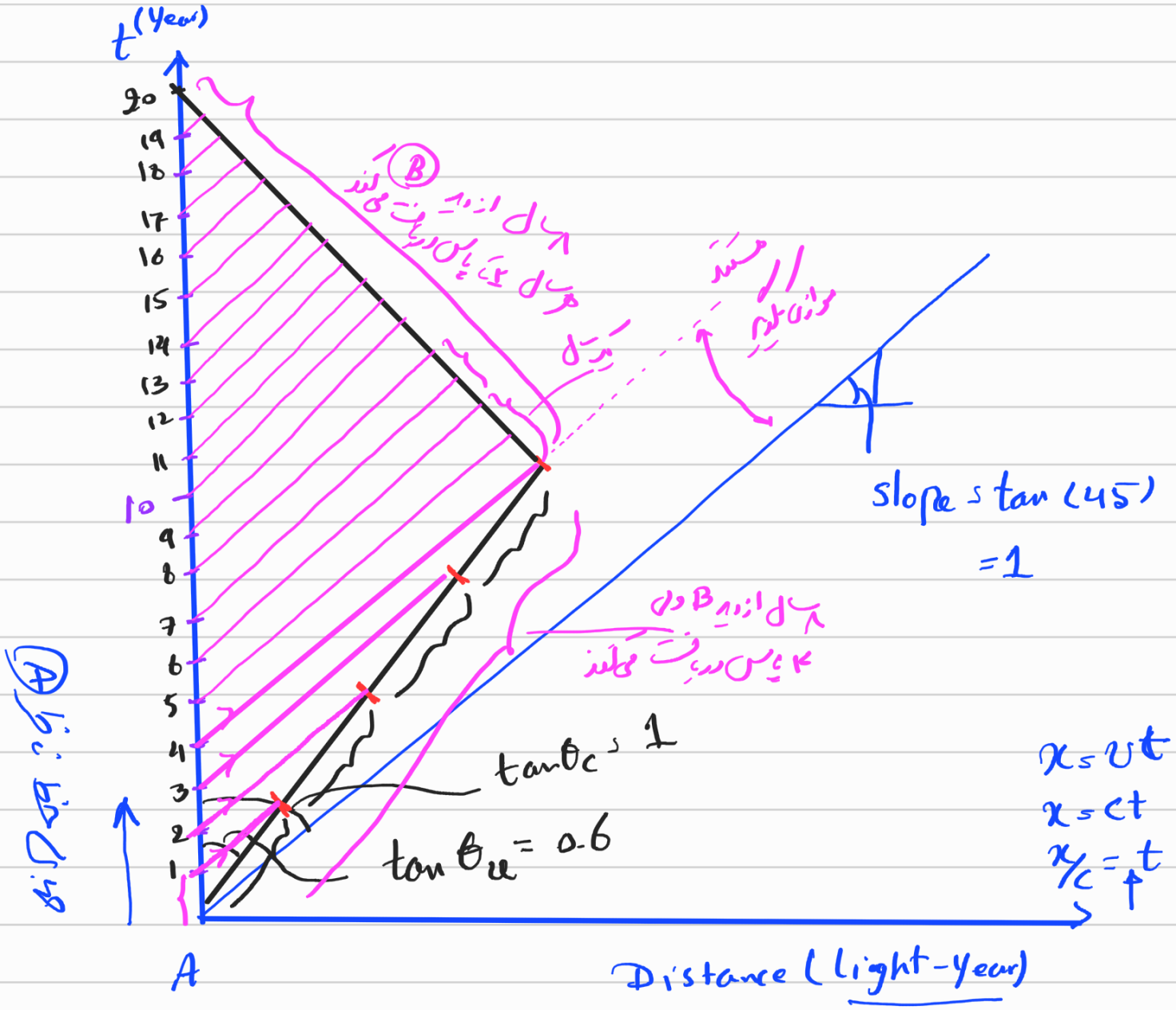
A و B در یک نقطه است

درصورتی که ۰ و یا این رویداد از دید ناظر A نیز همزمان است.

2.6: The Twin Paradox پارادوکس دوقلوها

صورت داستان از این قرار است که براساس اتساع زمان ساعت‌های متحرک کندتر کار می‌کنند: فرض کنید یکی از دوقلوها (B) درون یک فضاپیما (v = 0.6c) قرار دارد و از همان دوقلوی خود دور می‌شود. از دید A ساعت‌های درون فضاپیما کندتر کار می‌کنند پس

از نظر A زمان برای B کندتر می‌گذرد نتیجه اینکه هنگام بازگشت از سفر فضایی سن B از سن A کوچکتر است.



① در طی زمانی که B از A دور می‌شود

هر سال از طرف B سه پالس دریافت می‌کند.

$$f_B = f_A \sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}}$$

$$= \frac{1}{Year}\sqrt{\frac{1-0.6}{1+0.6}} = \frac{0.5}{Year}$$

② ۸ سال اول از طرف B تنها ۴ پالس دریافت می‌کند زمانی A ۴۰ سال دارد ولی B از طرف خودش ۸ سال دارد

③ برای برگشت با سرعت $u=0.6c$ به سمت A دوره‌گرد

$$f_B = f_A \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$

$$= \frac{1}{Year}\sqrt{\frac{1+0.6}{1-0.6}} = \frac{2}{Year}$$

طی ۸ سال بازگشت از طرف B، او ۱۶ پالس دریافت می‌کند.

ناظر B از نظر خودش ۸ (دور شدن) + ۸ (نزدیک شدن) = ۱۶ ms

ناظر A از نظر خودش ۴ (دور شدن) + ۱۶ (نزدیک شدن) = ۲۰ ms

سایت در test frame تندتر حرکت کرده است

خب تا اینجا ما یک نسبت خاص را بررسی کردیم. حالا می‌خواهیم به دینامیک بپردازیم