بسمه تعالی

امتحان میان‌ترم اول درس مکانیک آماری پیشرفته ۱

۴ آذر ۱۴۰۰

پاسخ‌ها

۱ معادله‌ی کلازیوس_ کلاپیرون

هدف این معادله، توصیف میزان تغییرات فشار نسبت به دما در نقطه‌ی جوش است. برای به دست آوردن آن، اول یک ماشین کارنو را در نظر بگیرید که از ۱ مول آب استفاده می‌کند. در چشمه‌ی گرم (P,T) گرمای نهان جوش به میزان L به سیستم تزریق می‌شود و آب را تبخیر می‌کند. اینکار با افزایش حجم به میزان V همراه است. پس از آن، فشار به صورت بی‌دررو کم می‌شود تا به $P-dP$ برسد. در چشمه‌ی سرد $(P-dP,T-dT)$ بخار دوباره چگال شده و به آب تبدیل می‌شود.

(آ) نشان دهید که کار خروجی ماشین برابر است با $W=VdP+\mathcal{O}(dP^2)$ و با کمک آن معادله‌ی کلازیوس_ کلاپیرون را به دست آورید:

$$\left.\frac{dP}{dT}\right|_{boiling}=\frac{L}{TV}\,. \qquad (۱)$$

جواب:

$$W=\oint PdV\,.$$

تنها جای فرآیند کارنو که کار روی محیط انجام می‌شود، فرآیند بی‌دررو توصیف شده است. با تقریب خوبی، این فرآیند در حجم ثابت رخ می‌دهد. پس می‌توانیم بنویسیم

$$W=\oint PdV=PV-(P-dP)V=VdP+\mathcal{O}(dP^2)\,.$$

برای بازده چرخه‌ی کارنو، دو رابطه‌ی معادل داریم

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H}\,,$$

در مساله‌ی فعلی،

$$Q_H = L, \quad W = V dP, \quad T_H = T, \quad T_C = T - dT\,.$$

با جایگذاری در روابط بالا داریم

$$\frac{V dP}{L} = \frac{dT}{T} \qquad \Longrightarrow \qquad \left.\frac{dP}{dT}\right|_{boiling} = \frac{L}{TV}\,.$$

(ب) فرض کنید که L، (تقریبا) مستقل از دماست و تغییرات حجم تماما مربوط به بخار است. بخار را نیز یک گاز کامل در نظر بگیرید. از معادله‌ی ۱ انتگرال بگیرید تا فشار را بر حسب دما به دست آورید.

جواب: برای یک گاز کامل داریم:

$$V = \frac{Nk_BT}{P} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dP}{dT} = \frac{LP}{Nk_BT^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dP}{P} = \frac{L}{Nk_B}\frac{dT}{T^2}\,.$$

با انتگرال گیری از معادله‌ی بالا و درنظر گرفتن این نکته که این روابط در نقطه‌ی جوش برقرارند داریم

$$\ln(P) = -\frac{L}{Nk_BT} + C' \qquad \Longrightarrow \qquad P = C \cdot \exp\left(-\frac{L}{Nk_BT_{Boiling}}\right)\,.$$

(پ) به دلیل وجود نیروی گرانش، فشار هوا به ارتفاع از زمین بستگی دارد. با اعمال قانون سوم نیوتن روی یک تیغه‌ی هوا (گاز کامل) به ضخامت dh، معادله‌ای برای فشار در ارتفاع h به دست آورید. (نیاز به محاسبه‌ی جرم و درصد تک تک مولکول‌های هوا نیست، می‌توانید یک جرم متوسط به آن‌ها نسبت دهید.)

جواب: یک تیغه‌ی نازک از هوا به مساحت A را در نظر بگیرید که بین ارتفاع h و $h+dh$ قرار دارد. نیروی گرانشی وارد بر آن برابراست با

$$dF_{gravity} = Mg = Mg\frac{Adh}{V} = mg\frac{N}{V}Adh\,,$$

در رابطه‌ی بالا، M جرم کل تیغه، m متوسط جرم مولکول‌های هوا و N تعداد مولکول‌ها در تیغه است. همچنین حجم را یک بار به صورت V و بار دیگر به صورت Adh نوشتیم. با کمک روابط گاز کامل داریم

$$dF_{gravity} = mg\frac{P}{k_BT}Adh\,.$$

نیروی گرانشی باید با نیروی حاصل از فشار خنثی شود،

$$dF_{pressure} = A[P(h) - P(h+dh)] = -\frac{\partial P}{\partial h}Adh\,.$$

حالا دو نیرو را برابر قرار می‌دهیم و انتگرال می‌گیریم

$$-\frac{\partial P}{\partial h} = -mg\frac{P}{k_BT} \qquad \Longrightarrow \qquad P(h) = P_0\exp\left(-\frac{mgh}{k_BT}\right)\,.$$

۲ کار انجام شده در یک سیستم بسته

نشان دهید در یک سیستم که با محیط تبادل انرژی دارد ولی تبادل ماده نه، حداقل کار انجام شده برابر است با

(آ) افزایش انرژی آزاد هلمهولتز در حالتی که دما و حجم ثابت‌اند.

جواب:

$$W_{min} = \Delta U - T^{(e)}\Delta S + P^{(e)}\Delta V - \sum_j \mu_j^{(e)}\Delta N_j \leq W \,.$$

در عبارت بالا، بالانویس (e) به معنی این است که این پارامتر، با پارامتر مقدار محیط بیرون یکسان است. پس در این مسئله که دما و حجم ثابت اند، واضح است که

$$W_{min} = \Delta U - T\Delta S = \Delta F \,,$$

که در آن، F انرژی آزاد هلمهولتز است.

(ب) افزایش انرژی آزاد گیبس در حالتی که دما و فشار ثابت‌اند.

جواب:

$$G = F + PV \,, \qquad if\ P = cte. \,, \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta G = \Delta F + P\Delta V \,.$$

پس مسئله اثبات می‌شود.

۳ انبساط آزاد

یک بادکنک حاوی گاز کامل به حجم V_1 را در اتاقی خالی به حجم V_2 می‌ترکانیم. افزایش آنتروپی گاز را بین دو حالت بیان شده، حساب کنید. نشان دهید این فرآیند برگشت‌ناپذیر است. (اتاق را یک سیستم بسته در نظر بگیرید که هیچ برهمکنشی با محیط بیرون ندارد.)

جواب:

$$dU = TdS - PdV + \mu dN\,.$$

در چنین فرآیندی، هیچگونه مبادله‌ی انرژی یا ماده با بیرون وجود ندارد، پس

$$dS = \frac{P}{T}dV = Nk_B\frac{dV}{V} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta S = Nk_B \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\,.$$

از آنجایی که این فرآیند یک فرآیند بی‌دررو است که در آن آنتروپی افزایش می‌یابد ($V_2 > V_1$ پس $\Delta S > 0$)، طبق قانون دوم ترمودینامیک یک فرآیند برگشت‌ناپذیر است.

۴ آنتروپی سیاهچاله

یک سیاهچاله، ناحیه‌ای از فضاست که در آن، گرانش آنقدر قوی است که هیچ چیز، حتی نور، نمی‌تواند از آن فرار کند. در نتیجه، انداختن یک جسم درون سیاهچاله یک فرآیند برگشت‌ناپذیر است. هم به معنای روزمره‌ی آن هم به این معنا که اضافه کردن جرم به سیاهچاله آنتروپی آن را افزایش می‌دهد. به نظر می‌رسد که با نگاه از بیرون، هیچ راهی وجود ندارد که بتوان تشخیص داد یک سیاهچاله از چه نوع موادی تشکیل شده (لااقل در ساده‌ترین نوع سیاهچاله که بار و تکانه زاویه‌ای آن صفر است). در نتیجه آنتروپی یک سیاهچاله، باید بزرگتر از آنتروپی هر نوع ماده‌ای که می‌توانسته آن را تشکیل دهد باشد. با دانستن این موارد، تخمین آنتروپی یک سیاهچاله کار سختی نیست.

(آ) با استفاده از تحلیل ابعادی، نشان دهید شعاع یک سیاهچاله باید از مرتبه‌ی GM/c^2 باشد. که در آن، G ثابت جهانی گرانش، c، سرعت نور و M جرم سیاهچاله است. پس از آن، شعاع حدودی یک سیاهچاله هم‌جرم خورشید را محاسبه کنید ($M = 2 \times 10^{30}\ kg$).

جواب:

$$[G] = N \cdot m^2/kg^2 = m^3/kg \cdot s^2\,, \qquad \Longrightarrow \qquad [c] = m/s \qquad [G/c^2] = m/kg\,,$$
$$[M] = kg\,, \qquad \Longrightarrow \qquad [GM/c^2] = m\,,$$

$$\therefore \quad R \sim GM/c^2\,.$$

با جایگذاری جرم خورشید در این معادله، شعاع سیاهچاله‌ی حاصل، حدود ۱۵۰۰ متر به دست می‌آید.

(ب) برای اینکه یک سیاهچاله را از حداکثر تعداد ذره‌ی ممکن بسازیم، باید ذراتی با حداقل انرژی ممکن را انتخاب کنیم. یعنی فوتون‌ها (یا ذرات بدون جرم دیگر) با بالاترین طول موج ممکن. البته طول موج این فوتون‌ها نمی‌تواند از اندازه‌ی سیاهچاله بزرگتر باشد. با مساوی قرار دادن مجموع انرژی فوتون‌ها با انرژی سیاهچاله (راهنمایی: رابطه اینشتین) حداکثر تعداد فوتون‌های تشکیل دهنده‌ی آن را حساب کنید. حالا با کمک این نتیجه، آنتروپی یک سیاهچاله را به دست آورید. نتیجه‌ی شما بجز یک ضریب $8\pi^2$ باید با فرمول دقیق آنتروپی سیاهچاله (که از محاسباتی بسیار پیچیده‌تر به دست می‌آید) همخوانی داشته باشد:

$$S_{b.h.} = \frac{8\pi^2 GM^2}{hc} k_B\,.$$

آنتروپی یک سیاهچاله با جرم خورشید را به دست آورید.

جواب: اگر N فوتون با طول موج داده شده در بخش قبل مسئله داشته باشیم، می‌توانیم با ترکیب کردن رابطه‌ی اینشتین ($E = Mc^2$) و رابطه‌ی پلانک ($\epsilon_{photon} = h\nu = hc/\lambda$)، بنویسیم

$$Mc^2 = N\epsilon = \frac{Nhc}{\lambda} = \frac{Nhc^3}{GM} \qquad \Longrightarrow \qquad N = \frac{GM^2}{hc}\,.$$

می‌دانیم آنتروپی از مرتبه‌ی ثابت بولتزمان در تعداد ذرات است، پس داریم

$$S \sim \frac{GM^2}{hc} k_B\,.$$

برای یک سیاهچاله به جرم خورشید

$$S = \frac{8\pi^2 (6.67\times^{-11})(2\times 10^{30})^2 (1.38\times 10^{-23})}{(6.63\times 10^{-34})(3\times 10^8)} = 1.5\times 10^{54}\ J/K\,.$$

۵ گرمای ویژه

گرمای ویژه یک گاز ایده‌آل به صورت $C_V = Nf(T)$ داده شده است. انرژی آزاد هلمهولتز، انرژی داخلی گاز، آنتروپی و پتانسیل شیمیایی را حساب کنید.

جواب:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T} = N\frac{f(T)}{T}\,,$$

$$\Longrightarrow \qquad S = N\int^T \frac{f(T')}{T'}dT' + g_1(V,N)\,.$$

در رابطه‌ی بالا، g_1 تابعی‌ست که باید تعیین شود. از آنجایی که $(\partial F/\partial T)_V = -S$ ، داریم

$$F = -\int^T S(T')dT' + g_2(V,N)$$

$$= -N\int^T dT' \int^{T'} \frac{f(T'')}{T''}dT'' - Tg_1(V,N) + g_2(V,N)\,,$$

که در آن F انرژی آزاد هلمهولتز است و g_2 باید تعیین شود. با مشتق گیری جزء به جزء داریم

$$\int^T dT' \int^{T'} \frac{f(T'')}{T''}dT'' = T\int^T \frac{F(T')dT'}{T'} - \int^T f(T')dT'$$

پس

$$U = F + TS = N\int^T f(t')dT' + g_2(V,N)\,.$$

برای به دست آوردن g_1 و g_2 :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P = -\frac{Nk_BT}{V} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial g_1}{\partial V} = \frac{Nk_B}{V}\,, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial V} = 0\,,$$

$$\Longrightarrow \qquad g_1 = Nk_B \ln V + k\phi_1(N)\,, \qquad g_2 = \phi_2(N)\,.$$

وابستگی توابع g به حجم به دست آمد، برای محاسبه‌ی وابستگی آن‌ها به تعداد ذرات نیز می‌توان نوشت

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial N} = -\int^{T} dT' \int^{T'} \frac{f(T'')}{T''} dT'' - k_b T \ln N - k_B T \frac{d\phi_1}{dN} + \frac{d\phi_2}{dN} \,.$$

از آنجایی که در شکل تابعی μ، حجم و تعداد ذرات باید به صورت V/N ظاهر شوند، شکل تابعی ϕها به دست می‌آیند

$$\frac{d\phi_1}{dN} = -\ln N + \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \phi_1 = -N\ln N + N + N\alpha \,,$$

$$\frac{d\phi_1}{dN} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \phi_2 = N\phi_0 \,.$$

در روابط بالا، α و ϕ_0 ثابت‌هایی هستند که بسته به مسئله مشخص می‌شوند و نیازی به تعیین کردن ندارند.

حالا که g_1 و g_2 مشخص شدند و روابط مورد نیاز برای تعیین پارامترهای خواسته شده در مسئله نیز به دست آمدند، می‌توانیم با استفاده از آن‌ها جواب‌های نهایی خواسته شده را به دست آوریم:

$$F = -N\int^{T} dT' \int^{T'} \frac{f(T'')}{T''} dT'' - Nk_B T \ln \frac{V}{N} - Nk_B T + N\phi_0 - Nk_B T\alpha \,,$$

$$U = N\int^{T} f(T') dT' + N\phi_0 \,,$$

$$S = N\int^{T} \frac{f(T')}{T'} dT' + Nk_B \ln \frac{V}{N} - Nk_B + Nk_B\alpha \,,$$

$$\mu = -\int^{T} dT' \int^{T'} \frac{f(T'')}{T''} dT'' - k_B T \ln \frac{V}{N} + \phi_0 - k_B T\alpha \,.$$