بسم الله الرحمن الرحیم

حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و یا بالاتر

Ⓐ
$$\frac{d^2y}{dx^2} + g(x,y)\frac{dy}{dx} + h(x,y) = M(x)$$

$$\begin{cases} A \equiv \dfrac{dy}{dx} \\ B \equiv \dfrac{dA}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2} = M(x) - h(x,y) - g(x,y)A \end{cases}$$

اکنون بسختی

$A, B = ?$

$$A = \frac{dy}{dx} \longrightarrow \quad y(x+\Delta x) = y(x) + A(x,y)\Delta x \qquad ①$$

$$B = \frac{dA}{dx} \longrightarrow \quad A(x+\Delta x) = A(x) + B(x,y)\Delta x \qquad ②$$

اکنون با دو شرط اولیه $y(x=x_0) = ✓$ می‌توان مسئله را حل کرد.

$A(x=x_0) = ✓$

Ⓑ در این روش می‌خواهم مبتنی بر روش RK مسئله را حل کنم

برای این منظور یادآوری می‌کنم که برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول داریم

$$\frac{dy}{dx} = A(x,y) \longrightarrow \quad y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta x}{6}\left[f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right]$$

$$f_1 = A(x_k, y_k)$$

$$f_2 = A\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{\Delta x}{2} f_1\right)$$

$$f_3 = A\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{\Delta x}{2} f_2\right)$$

$$f_4 = A(x_k + \Delta x, y_k + \Delta x f_3)$$

اکنون به حالت مرتبه دوم داریم

$$\frac{d^2y}{dx^2} + N(x,y)\frac{dy}{dx} + h(x,y) = M(x)$$

$$A(x,y) \equiv \frac{dy}{dx} = y'$$

$$B(x,y) \equiv \frac{d^2y}{dx} = \frac{dA}{dx} = M(x) - N(x,y)A(x,y) - h(x,y)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta x}{6}\left[f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right]$$

$$\begin{cases} f_1 = A(x_k, y_k, y'_k) = y'_k \\ g_1 = B(x_k, y_k, y'_k) = M(x_k) - N(x_k, y_k)\overbrace{A(x_k, y_k)}^{f_1} - h(x_k, y_k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2 = A\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{\Delta x}{2} f_1, y'_k + \frac{\Delta x}{2} g_1\right) \\ g_2 = B\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{\Delta x}{2} f_1, y'_k + \frac{\Delta x}{2} g_1\right) \end{cases}$$

$$f_3 = A\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{\Delta x}{2} f_2, y'_k + \frac{\Delta x}{2} g_2\right)$$

$$g_3 = B\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + \frac{\Delta x}{2} f_2, y'_k + \frac{\Delta x}{2} g_2\right)$$

$$f_4 = A(x_k + \Delta x,\ y_k + \Delta x f_3,\ y'_k + \Delta x\, g_3)$$

$$g_4 = B(x_k + \Delta x,\ y_k + \Delta x f_3,\ y'_k + \Delta x\, g_3)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta x}{6}\left[f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right]$$

$$y'_{k+1} = y'_k + \frac{\Delta x}{6}\left[g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4\right]$$

واضح است که با داشتن y'_0 و y_0 می‌توان $f_1 = y'_0$ است را حساب کرد

و سپس از آن g_1 حساب می‌شود بعد f_2 و g_2 و بعد f_3 و g_3 و بعد f_4 و g_4 و نهایتاً

y_{k+1} و y'_{k+1}

محاسبه شده بعد همین روند را ادامه خواهد کرد.

Boundary value problem

معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی نیز در بسیاری از مسائل ایجاد می‌شوند - در حالت کلی نزدیکی ندارد که معادله جواب داشته باشد یا حتی جواب یکتا داشته باشد اما در چارچوب قضیه‌ای بحث وجود و یکتایی مطرح می‌شود یعنی توجه کنید که

$$y'' = f(x, y, y') \qquad y(a) = \alpha$$
$$y(b) = \beta$$

قضیه uniquness

if $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, $f(x, y, y')$ to be continuous

and if $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M = cts \longrightarrow$ جواب یکتا خواهیم داشت

به بیانی دیگر می‌توان مسئله BVP را به مسئله IVP تبدیل کنیم. یعنی

$$y'' = P(x)y' + q(x)y + r(x) \longrightarrow \begin{array}{l} y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{array}$$

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x)$$ دارای جواب

است که y_1 و y_2 حل معادله IVP

$$y_1'' = P(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x) \longrightarrow \begin{array}{l} y_1(a) = \alpha \\ y_1'(a) = 0 \end{array}$$

$$y_2'' = P(x)y_2' + q(x)y_2 \longrightarrow \begin{array}{l} y_2(a) = 0 \\ y_2'(a) = 1 \end{array}$$

البته برای حالت BVP خطی صحیح است. قبل از اینکه به سراغ حل غیر خطی برویم اثبات می‌کنیم که

چرا جواب $y(x)$ به صورت آنچه که گفتیم بود؟

$$\begin{cases} y_1'' = P(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x) \\ y_1(a) = \alpha \quad , \quad y_1'(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2'' = P(x)y_2' + q(x)y_2 \\ y_2(a) = 0 \quad , \quad y_2'(a) = 1 \end{cases}$$

جواب ترکیب خطی

$$y(x) = y_1(x) + C\,y_2(x)$$

حال این را دو بار مشتق می‌گیریم یعنی:

$$y''(x) = y_1''(x) + C y_2''(x)$$

$$= P(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x) + CP(x)y_2' + Cq(x)y_2 + Cr(x)$$

$$= P(x)\left[y_1' + Cy_2'\right] + q(x)\left[y_1(x) + Cy_2(x)\right] + r(x)$$

حال شرایط مرزی را قرار می‌دهیم

$$y(a) = y_1(a) + Cy_2(a) = \alpha$$

$$y(b) = y_1(b) + Cy_2(b) = \beta \rightarrow C = \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}$$

پس

$$y(x) = y_1(x) + C\,y_2(x)$$

$$\boxed{y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}\,y_2(x)}$$

در حالت غیرخطی نیز داریم :

$$y'' = f(x, y, y') \qquad a \leq x \leq b$$

$$y(a,t) = \alpha \qquad y(b,t) - \beta = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$y'(a,t) = t$$

t پارامتری است که شرایط فوق را ارضا می‌کند. حال آن را تعریف کنیم

$$z(x,t) \equiv \frac{\partial y}{\partial t} \quad , \quad z' = \frac{\partial}{\partial x} z = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = \frac{\partial y'}{\partial t}$$

$$\boxed{y'' = f(x, y(x,t), y'(x,t))}$$

$$\frac{\partial y''}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} z = \frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial y'} z'$$

$$\boxed{z'' = \frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial y'} z'}$$

$$z(a,t) = 0$$
$$z'(a,t) = 1$$

(IVP) اکنون دو معادله مرتبه دوم جفت شده داریم

$$y'' = f(x, y(x,t), y'(x,t)) \longrightarrow \begin{cases} y(a,t) = \alpha \\ y'(a,t) = t \end{cases}$$

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial y'} z' \longrightarrow \begin{cases} z(a,t) = 0 \\ z'(a,t) = 1 \end{cases}$$

که می‌توان از روش RK حل کرد

در این شیوه فقط بحث توجه به پارامتر t داشته باشیم در بعضی

$$\frac{y(x,t+\Delta t)-y(x,t)}{\Delta t} = z$$

$$\frac{y(a+\Delta x,t)-y(a,t)}{\Delta x} = t \rightarrow \frac{y(a+\Delta x,t)-\alpha}{\Delta x} = t$$

در مرحله اول انتخاب برای y' که همان t خواهد بود عبارت است از

$$\frac{y(b,t)-y(a,t)}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a} = t$$

این فرآیند مرحله N یعنی $N = \frac{b-a}{\Delta x}$ تعداد گسسته سازی در x ادامه می‌یابد و پایان کار

$|y(x_N=b,t)-\beta|$ چک می‌شود اگر کوچکتر از TOL تمام می‌شود در غیر اینصورت باید مقدار

y' که همان t است دوباره اصلاح شود پس

مقدار جدید برای t انتخاب شود و دوباره ادامه پیدا کند پس با توجه به

$$\frac{\partial y}{\partial t} = z \rightarrow \frac{y(x,t+\Delta t)-y(x,t)}{\Delta t} = z$$

$$\underbrace{t+\Delta t}_{t_k} - \underbrace{t}_{t_{k-1}} = \frac{y(x_N,t+\Delta t)-y(x_N,t)}{z}$$

$$t_k = t_{k-1} + \frac{\beta - y_N}{z(b,t_{k-1})}$$

$$t_k = t_{k-1} + \frac{\beta - y(b,t_{k-1})}{z(b,t_{k-1})}$$

k مراحل اجرایی برای t است و N مراحل اجرایی برای x است.

در رهیافت حل شده با مقادیر مرزی در حالت کلی تضمینی وجود ندارد که برای مسئله جواب وجود داشته باشد و حتی اینکه جواب یکتا باشد. بنابراین با ملاحظات قضایای ریاضی روش پیشنهاد شده است و به طور کلی به قرار زیر است:

① تبدیل معادله دیفرانسیل با مقادیر مرزی به ۲ معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه یعنی

$$① \begin{cases} y'' = f(x, y(x,t), y'(x,t)) \\ y(a,t) = \alpha \\ y'(a,t) = t \end{cases}$$

$$② \begin{cases} z'' = \dfrac{\partial f}{\partial y} z + \dfrac{\partial f}{\partial y'} z' \\ z(a,t) = 0 \leftarrow \dfrac{\partial y}{\partial t}(a,t) = \dfrac{\partial}{\partial t}(\alpha) = 0 \\ z'(a,t) = 1 \leftarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial t}(a,t) = \dfrac{\partial}{\partial t} y' = \dfrac{\partial}{\partial t} t = 1 \end{cases}$$

② حال با انتساب $y'(a,t) = t$ می‌توان y را بدست آورد. بهترین انتسابی که می‌توان برای t داشت عبارت است از:

$$\frac{y(a+\Delta x, t) - y(a,t)}{\Delta x} = t \rightarrow \frac{y(b,t) - y(a,t)}{b-a} = \frac{\beta - \alpha}{b-a} = t$$

که این t یعنی t_1 حال با این t مسئله حل می‌شود و در نهایت بررسی می‌کنیم که

$$|y(x=b, t_1) - \beta| \overset{?}{\leq} Tol$$

اگر بودیم مسئله تمام می‌شود وگرنه در آن صورت با یک t جدید انتساب شود

③ انتساب t جدید:

$$\frac{y(x, t+\Delta t) - y(x,t)}{\Delta t} = z$$

$$\underbrace{t+\Delta t}_{t_{k+1}} - \underbrace{t}_{t_k} = \Delta t = \frac{y(x,t+\Delta t) - y(x,\Delta t)}{z}$$

$$t_{k+1} = t_k + \frac{y(b,t_{k+1}) - y(b,t_k)}{z(b,t_k)}$$

$$= t_k + \frac{\beta - y(b,t_k)}{z(b,t_k)}$$

اینکه چرا آخرین مقدار را جایگزین $y(x,t_{k+1})$ کردیم این است که نقطه فعلی برای ما مشکل ساز شده است
بنابراین بهترین گزینه خواهد بود. اکنون t جدید است آمد دوباره y را حل می‌کنیم و شرط

$$|y(b,t_{k+1}) - \beta| \leq Tol$$

چک می‌کنیم. و این مرحله تا وقتی که به دقتی خاص به جواب برسیم ادامه می‌یابد.

finite Difference Method

روش تفاضل محدود.

یک روش دیگر جهت محاسبه و حل معادلات دیفرانسیل BVP بهره گیری از روش تفاضل محدود است.

البته قبلاً در حل معادله لاپلاس با شرایط مرزی کمی در خصوص این روش آشنا شدیم در این بخش به طور ویژه در چارچوب یک مدل روش تفاضل محدود را دنبال می‌کنیم

مثال:

$$y'' = p(x)\,y' + g(x)\,y + r(x)$$

with following conditions

$$\begin{cases} y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

Now we make mesh as:

$$\begin{cases} h = \dfrac{b-a}{N} \\ x_i = a + hi \quad , \quad i = 1, \dots, N \\ x_1 = a + h \\ x_N = a + Nh = \beta \end{cases}$$

Now

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

پس با جایگذاری در عبارت فوق در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p(x_i)\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) + g(x_i)\,y_i + r(x_i)$$

که

$$\left(-\frac{h}{2}P_i-1\right)y_{i-1}+\left(2+h^2g_i\right)y_i+\left(\frac{h}{2}P_i-1\right)y_{i+1}=-h^2r_i$$

و $i=1,2,3,\dots,N$ که

$$\boxed{\begin{aligned} y_0&=\alpha\\ y_N&=\beta\end{aligned}}$$

به صورت ماتریسی برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 2+h^2g_1 & \frac{h}{2}P_1-1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{h}{2}P_2-1 & 2+h^2g_2 & \frac{h}{2}P_2-1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{h}{2}P_3-1 & 2+h^2g_3 & \frac{h}{2}P_3-1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{h}{2}P_4-1 & 2+h^2g_4 & \frac{h}{2}P_4-1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & -h^2/2\,P_{N-1}\,1 & 2+h^2g_{N-1}\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{N-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -h^2r_1+e_0\\ -h^2r_2\\ \vdots\\ -h^2r_{N-2}\\ -h^2r_{N-1}+e_N\end{bmatrix}$$

که در آن

$$e_0=\left(-h/2\,P_1+1\right)\alpha$$

$$e_N=\left(-h/2\,P_{N-1}+1\right)\beta$$

ماتریس ضرایب در واقع سه قطری tridiagonal است

حال با بقیه دستگاه معادلات فوق را حل کرد.

Finite Element Method

سخنرانی از ایه پیش حاجیان دی ۱۳۹۲

اجازه دهید با این سئوال شروع کنیم

How can Solve Poisson Eq in Various Dimension and Boundary.

از آنجا که در فضای گسسته کار می‌کنیم علی الاصول ϕ نا پیوسته است پس از نقطه نظر ریاضی معکوس $-\nabla^2\phi = f$ وجود ندارد. برای رهایی از این مشکل همچنین f نیز خود گسسته است. حال از یک تابع کمکی ψ استفاده می‌کنیم یعنی

$$-\int_\tau \nabla^2\phi\,\psi\,d\tau = \int f\psi\,d\tau$$

از قضیه گرین داریم:

$$\int_\tau \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi - \underbrace{\int_S \frac{\partial\phi}{\partial n}\psi}_{0} = \int_\tau f\psi\,d\tau$$

Dirichlet Condition $\rightarrow 0$

پس نهایتاً داریم:

$$\boxed{\int_\tau \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi\,d\tau = \int_\tau f\psi\,d\tau}$$

که در آن $\phi,\psi \in H_0^1$ تنها یک بار مشتق پذیر است.

$$f \in L^2$$

اکنون از پایه‌های در فضای هیلبرت برای تعریف ϕ و ψ بهره می‌گیریم یعنی

$$\phi = \sum_i \alpha_i u_i \quad , \quad \psi = \sum_i \beta_i u_i$$

پس

$$\int \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\phi \, d\tau = \int f \psi \, d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{ij}^{N} \beta_i \left(\int \vec{\nabla} u_i \cdot \vec{\nabla} u_j \right) \alpha_j = \sum_i^{N} \beta_i \left(\int f u_i \right)$$

که در اینجا ما معادله خواهیم داشت: به صورت شکل ماتریسی می‌توان نوشت

$$\beta^T \cdot A \cdot \alpha = \beta^T F$$

که در آن

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \int \vec{\nabla} u_i \cdot \vec{\nabla} u_j \, d\tau$$

$$F_i = \int u_i f \, d\tau$$

در Ritz-Galerkin app. وقتی که خودمان ψ را انتخاب کرده‌ایم پس

تقاضا می‌کنیم که ψ همان فضای هیلبرت باشد یعنی $\psi = u$ پس

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ldots$$

یعنی

$$\boxed{A\alpha = F}$$

اکنون دو حالت باقی مانده است و آن این است که ψ و همان u ها کدام‌ند و چگونه می‌توان آنها را انتخاب کرد

و همچنین باید نشان دهیم که A^{-1} وجود دارد.

$A =$ symmetric & positive Definit → معکوس پذیر است

$$\psi = \sum \beta_i u_i$$

$$\beta^T A \beta = \sum \beta_i^T A_{ij} \beta_j = \int |\nabla \psi|^2 \, d\tau \geq 0$$

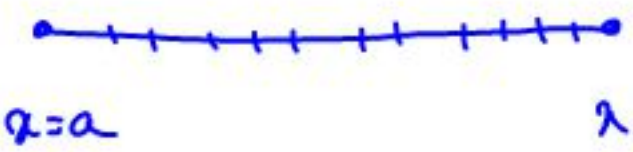
اگر سمت راست صفر باشد پس ψ باید صفر باشد پس اگر صفر نباشد ψ مثبت است

$A \longleftarrow$ positive-Definit است پس معکوس پذیر است.

How to choose u? حال u کدام است؟

"finite Element Method"

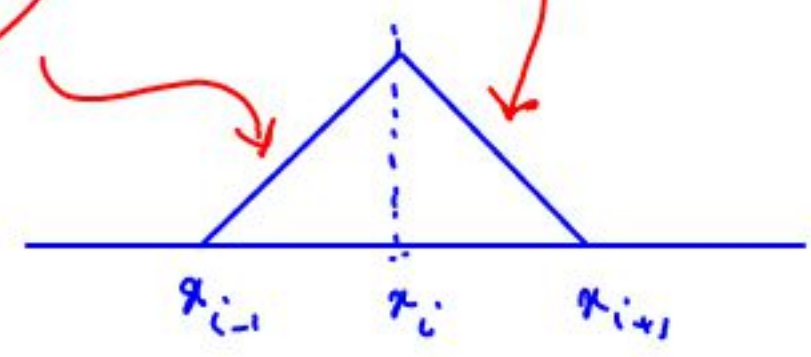
for example 1D



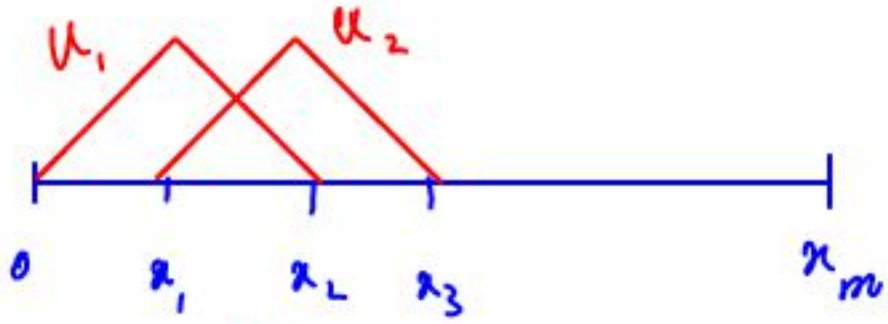
$$u = \left\{ u \in \tau ,\ u\big|_{\partial\tau} = 0 ,\ u\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ is linear} \right\}$$

البته می‌توانند مرتبه بالاتر نیز باشد. یک انتخاب می‌تواند به صورت زیر باشد

$$u_i = \begin{cases} \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\[2ex] \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i} & x_{i-1} \leq x < x_i \end{cases} \quad , \quad h_i = |x_i - x_{i-1}|$$



پس مثلاً ترکیب لگد داریم



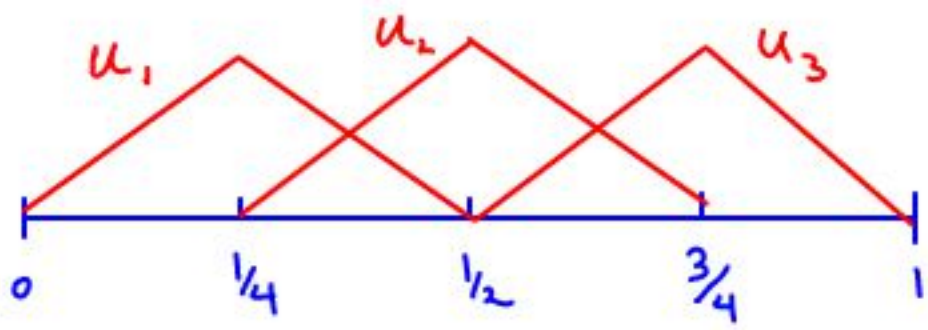
$$\phi = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i u_i$$

Ex: "1D" $\quad \nabla^2 \phi = f \qquad x \in [0,1]$ and $f=1$

$$\phi = ?$$

Theoretical prediction $\rightarrow \quad \phi = \frac{1}{2} x^2$

Based on finite element Method we have



$$u_1 = \begin{cases} \dfrac{x-0}{1/4} & 0 \leq x \leq 1/4 \\[2ex] \dfrac{1/2 - x}{1/4} & 1/4 \leq x < 1/2 \end{cases} = \begin{cases} 4x & 0 \leq x \leq 1/4 \\ 2-4x & 1/4 \leq x \leq 1/2 \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{x - 1/4}{1/4} & 1/4 \leq x \leq 1/2 \\[2ex] \dfrac{3/4 - x}{1/4} & 1/2 \leq x < 3/4 \end{cases} = \begin{cases} 4x-1 & 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 3-4x & 1/2 \leq x < 3/4 \end{cases}$$

$$u_3 = \begin{cases} \dfrac{x - 3/4}{1/4} & 1/2 \leq x \leq 3/4 \\[2ex] \dfrac{1-x}{1/4} & 3/4 \leq x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 4x-3 & 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ 4-4x & 3/4 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$$

$$A\alpha = F \quad \rightarrow \quad \alpha = A^{-1} F$$

$$A_{11} = \int |\vec{\nabla} u_1|^2 d\tau = 16 \times 1/4 + (-4)^2 \, 1/4 = 4 + 4 = 8$$

$$A_{12} = \int \vec{\nabla} u_1 \cdot \vec{\nabla} u_2 \, d\tau = \frac{-4 \times 4}{4} = -4$$

$$\int u_1 \, 1 \, dx$$

$$A_{13} = 0$$

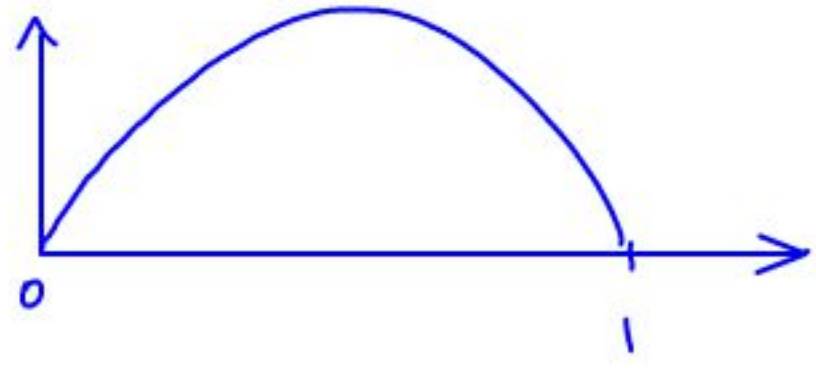
$$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = A^{-1} F = \begin{pmatrix} 3/32 \\ 1/8 \\ 3/32 \end{pmatrix}$$

$$\phi = 3/32 \, u_1 + 1/8 \, u_2 + 3/32 \, u_3$$

$\sigma =$

$$\phi = \begin{cases} \frac{3}{32} \times 4x & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{3}{32} \times (2-4x) + \frac{1}{8}(4x-1) & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \vdots & \end{cases}$$



EX 2D