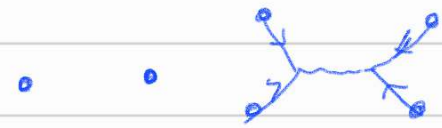
بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۱۳/۱۰/۱۴۰۱

# Perturbative RG

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathcal{H}_0}_{\text{Gaussian}} + \underbrace{\mathcal{U}(u, m^4)}_{\text{perturbation}}$$



U_Vertex

RG :

$\boxed{1}$ Coarse grain

→ Real space $x \geq a \to x \geq la$

marginalization $a \leq x \leq la$

→ Fourier space $q \leq \Lambda \to q \leq \frac{\Lambda}{l}$

marginalization $\frac{\Lambda}{l} \leq q \leq \Lambda$

$$m(\vec{x}) \longrightarrow \tilde{m}(\vec{q}) : \left\{ \begin{array}{ll} m(\vec{q}) & \text{for } 0 < q \leq \Lambda/l \\ \sigma(\vec{q}) & \text{for } \Lambda/l \leq q < \Lambda \end{array} \right\}$$

Singular part

خواص بحرانی را نشان می‌دهد

$$: \{ m(\vec{q}) \oplus \underbrace{\sigma(\vec{q})}_{} \}$$

بی‌اثر سازی می‌شود.

$$\vec{m}(\vec{x}) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \vec{m}(\vec{q})$$

$$= \underbrace{\int_0^{\Lambda/l} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} m(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\cdot x}}_{\text{طول موج های بزرگ}} + \underbrace{\int_{\Lambda/l}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \sigma(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}}_{\text{طول موج کوچک (بی‌اثر سازی شود)}}$$

$a\ell \leqslant \quad < \infty$ مدهای $\qquad\qquad$ $a \leqslant \quad \leqslant \ell a$ مدهای

$$Z = \int Dm(\bar{q})\, e^{-\beta \tilde{\mathcal{H}}[m]}$$

$$= \int Dm(\bar{q})\, e^{-\beta(\tilde{\mathcal{H}}_0 + \tilde{\mathcal{U}})}$$

$$= \int D\tilde{m}(\bar{q})\, D\sigma(\bar{q})\, e^{-\beta(\tilde{\mathcal{H}}_0 + \tilde{\mathcal{U}})}$$

$$= \int D\tilde{m}(\bar{q}) D\sigma(\bar{q})\, e^{-\int_0^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(\frac{t + Kq^2}{2}\right) \overbrace{\left( |\tilde{m}(q)|^2 + |\sigma(\bar{q})|^2 \right)}^{|m(q)|^2 \qquad L=0} - \tilde{\mathcal{U}}}$$

$$= \int D\tilde{m}(q)\, e^{-\int_0^{\Lambda/\ell} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{t + Kq^2}{2} |\tilde{m}(q)|^2} \times$$

$$\int D\sigma(\bar{q})\, e^{-\int_{\Lambda/\ell}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{t + Kq^2}{2} |\sigma(\bar{q})|^2 - \mathcal{U}([\tilde{m}, \tilde{\sigma}])}$$

$$= \left( \int D\tilde{m}(\bar{q})\, e^{-\int_0^{\Lambda/\ell} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{t + Kq^2}{2} |\tilde{m}(q)|^2} \right)$$

$$\times \left( e^{-\frac{nV}{2} \int_{\Lambda/\ell}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \ln(t + Kq^2)} \right) \times \left\langle e^{-\mathcal{U}([\tilde{m}, \sigma])} \right\rangle_{\sigma}$$

$$= Z$$

$$\begin{cases} \langle O \rangle_\sigma \equiv \int \mathcal{D}\sigma(q)\, \dfrac{O}{Z_\sigma}\, e^{-\int_{\Lambda/\ell}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{t+Kq^2}{2} |\sigma(q)|^2} \\ Z_\sigma \equiv \int \mathcal{D}\sigma(q)\, e^{-\beta \mathcal{H}_0(\sigma)} \end{cases}$$

حالا:

$$Z = \int \mathcal{D}m(q)\, e^{-\beta \tilde{\mathcal{H}}}$$

$$\text{A} \quad \beta \tilde{\mathcal{H}} = V\delta f^\circ + \int_0^{\Lambda/\ell} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{t+Kq^2}{2} |\tilde{m}(q)|^2 - \ln \left\langle e^{-\mathcal{U}[\tilde{m},\sigma]} \right\rangle_\sigma$$

لازم آن جمله را بنویسیم

$$\ln \langle e^{-\mathcal{U}} \rangle_\sigma = \underbrace{-\langle \mathcal{U} \rangle_\sigma}_{\text{تا مرتبه اول}} + \frac{1}{2}\left[\langle \mathcal{U}^2 \rangle_\sigma - \langle \mathcal{U} \rangle_\sigma^2\right] + \cdots$$

$$-\langle \mathcal{U} \rangle_\sigma = -u \int \frac{d^d q_1\, d^d q_2\, d^d q_3\, d^d q_4}{(2\pi)^{4d}} (2\pi)^d \delta_D(q_1+q_2+q_3+q_4) \times$$

$$\Big\langle \underbrace{\underbrace{[\tilde m(q_1)+\sigma(q_1)]\cdot[\tilde m(q_2)+\sigma(q_2)]}\ \underbrace{[\tilde m(q_3)+\bar\sigma(q_3)]\cdot[\tilde m(q_4)+\sigma(q_4)]}_{(m\cdot m)^2}}_{16\text{-Terms}} \Big\rangle_\sigma$$

تعداد جملات مشابه این

شکل ریاضی

① $1\ \langle \tilde m(q_1)\cdot\tilde m(q_2)\ \ \tilde m(q_3)\cdot\tilde m(q_4)\rangle_\sigma$

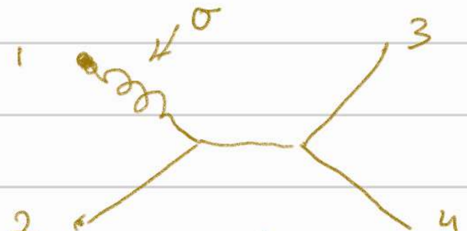

شکل دیاگرامی

$\mathcal{U}[\tilde m]$

نتیجه

تعداد جملات

② $4\ \langle \bar\sigma(q_1)\cdot\tilde m(q_2)\ \ \tilde m(q_3)\cdot\tilde m(q_4)\rangle_\sigma$



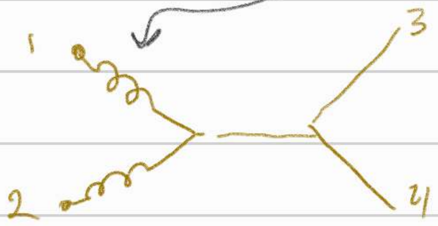

0

نتیجه

شکل دیاگرامی

تعداد جملات

③ $2\ \langle \underbrace{\bar\sigma(q_1)\cdot\sigma(q_2)}\ \ \tilde m(q_3)\cdot\tilde m(q_4)\rangle_\sigma$





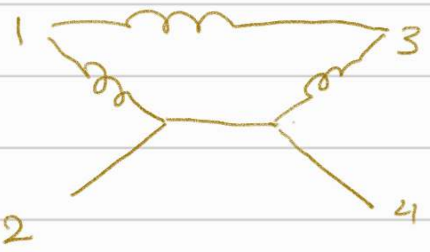
نتیجه

تعداد جمله

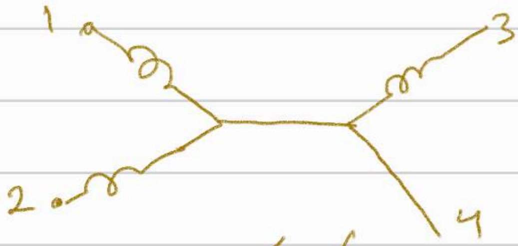
④ $4\left\langle \underbrace{\sigma(q_1)\cdot\tilde{m}'(q_2)}\ \underbrace{\sigma(q_3)\cdot m'(q_4)}_{2}\right\rangle_0$

$4 = 2 \times 2$

شکل دیاگرامی



⑤ $4\left\langle \sigma(q_1)\cdot\sigma(q_2)\ \sigma(q_3)\cdot\tilde{m}'(q_4)\right\rangle_0$



شکل دیاگرامی

نتیجه ۰

⑥ $\underline{1}\left\langle \sigma(q_1)\cdot\sigma(q_2)\ \sigma(q_3)\cdot\sigma(q_4)\right\rangle_0$

۱۶ تا جمله

شکل دیاگرامی

۸ تا جمله صفر هستند پس بقیه را باید حساب کنیم.

نتیجه جمله ۳ چیست؟

$$-u\,\overset{\text{تعداد جملات}}{2}\int \frac{d^dq_1\,d^dq_2\,d^dq_3\,d^dq_4}{(2\pi)^{4d}}(2\pi)^d\delta_D(q_1+q_2+q_3+q_4)\,\underbrace{\sum^{n}\delta_{ii}\frac{(2\pi)^d\delta_D(q_1+q_2)}{t+Kq_1^2}}$$

$$\times\,\tilde m(q_3)\cdot\tilde m(q_4)$$

$$= \overset{\text{ضرایب هستند}}{-2nu}\underbrace{\int_0^{\Lambda/l}\frac{d^dq}{(2\pi)^d}|\tilde m(q)|^2}_{m\cdot m}\,\overbrace{\int_{\Lambda/l}^{\Lambda}\frac{d^dq'}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kq'^2}}^{\langle\sigma\cdot\sigma\rangle_0}$$

نتیجه جمله ۴ چیست؟ مثل نتیجه ۳ است فقط به جای $\delta_{ii} \leftarrow \delta_{ij}$ یعنی

ضریب $n$ ندارد.

نتیجه جمله ۶ هم به عدد ثابتی می‌رسد که اهمیتی ندارد.

A →

$$\beta\mathcal{H} = V(\delta f_l^0 + \overbrace{u\,\delta f_l'}^{\text{سهم جمله ۶}}) + \underbrace{\int_0^{\Lambda/l}\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{(\tilde t+Kq^2)}{2}|\tilde m(q)|^2}_{\text{سهم جملات ۳ و ۴}}$$

$$\underbrace{+u\int_0^{\Lambda/l}\frac{d^dq_1\,d^dq_2\,d^dq_3}{(2\pi)^{3d}}\tilde m(q_1)\cdot\tilde m(q_2)\,\tilde m(q_3)\cdot\tilde m(q_4)}_{\text{سهم جمله اول از جنس } m^4}$$

که داریم

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{t} = t + 4u(n+2)\displaystyle\int_{\Lambda/l}^{\Lambda} \frac{d^d q'}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{t+Kq'^2} \\[2ex] \tilde{K} = K \\[1ex] \tilde{u} = u \end{array}\right\}$$

ضرایب جفت شدگی تا مرتبه $\underline{O(u)}$ به صورت بالا تغییر کردند پس از دانه درشت کردن

$\boxed{2}$ Rescaling $\quad x \to x' = x/l$

$q \to q' = lq$

$\boxed{3}$ Renormalization $\quad m \to m' = m/z = l^{x_m}\, m$ $\qquad \boxed{x_m \neq x'_m}$

$\tilde{m} \to \tilde{m}' = \dfrac{\tilde{m}}{z} = l^{x'_m}\,\tilde{m}$

$$\beta\tilde{\mathcal{H}} \to \beta\mathcal{H}' = \int_0^{\Lambda} \frac{d^d q'}{(2\pi)^d}\, l^{-d} z^2\, \frac{\tilde{t} + K l^{-2} q'^2}{2} |m'(q')|^2$$

$$+ u z^4 l^{-3d} \int_0^{\Lambda} \frac{d^d q'_1\, d^d q'_2\, d^d q'_3}{(2\pi)^{3d}}\, m'(q'_1)\cdot m'(q'_2)\, m'(q'_3)\cdot m'(q'_4)$$

$q'_4 = -q'_1 - q'_2 - q'_3$

هامیلتونی بازبهنجارش شده با ضرایب جدید در حضور اختلال.

ضرایب جدید

$$\begin{cases} t' \equiv \ell^{-d} z^2 \tilde{t} \\ K' \equiv \ell^{-d-2} z^2 K \\ u' \equiv \ell^{-3d} z^4 u \end{cases}$$

نقطه بحرانی $t^* = u^* = 0$

و $K$ ضریب ثابت هست

$$K' = K \longrightarrow \boxed{Z = \ell^{\frac{d+2}{2}}}$$

$$\begin{cases} t'_\ell = \ell^2 \left[ t + 4u(n+2) \int_{\Lambda/\ell}^{\Lambda} \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \frac{1}{t + K q'^2} \right] \\ u'_\ell = \ell^{4-d} u \end{cases}$$

$$[K'] = R_\ell [K] \qquad , \begin{cases} \ell = e^{\delta \ell} \\ \ell = 1 + \delta \ell \end{cases}$$

$$t' = t(\ell) = t(1+\delta\ell) = t + \delta\ell \frac{dt}{d\ell} \longrightarrow \beta_\ell = \frac{dK}{d\ell}$$

$$u' = u(\ell) = u(1+\delta\ell) = u + \delta\ell \frac{du}{d\ell}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dt}{d\ell} &= 2t + \frac{4u(n+2)}{t + K\Lambda^2} g_D \Lambda^d \\ \frac{du}{d\ell} &= \underbrace{(4-d)}_{\epsilon} u = \epsilon u \end{aligned}\right\} \quad \beta\text{-Functn}$$

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix}\delta t\\ \delta u\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & \frac{4u(n+2)g_0\Lambda^2}{t+K\Lambda^2} \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}}_{\text{ویژه مقادیر ها}} \begin{pmatrix}\delta t\\ \delta u\end{pmatrix}$$

$$x_t = 2$$

$$x_u = \epsilon$$

در $d>4 \leftarrow \epsilon<0 \leftarrow$ $u$ کمیت نامربوط است.

در $d<4$ — $\epsilon>0 \leftarrow$ $u$ کمیت مربوط است. $\leftarrow$ احتمالا خراب می‌شود.

$$\boxed{O(u^2)}$$

$$\frac{dt}{dl} = 2t + \frac{4u(2+n)}{t+K\Lambda^2} g_0 \Lambda^d - Au^2$$

$$\frac{du}{dl} = \epsilon u - Bu^2 \qquad A, B>0$$

$$\begin{cases} t^* = 0 \\ u^* = 0 \end{cases}$$ در این حالت نقطه ثابت گوسی

$d>4$ — قابل قبول نیست

$d<4$ قابل قبول

بعدا نشان می‌دهیم $\quad * \begin{cases} u^* = \epsilon/B \\ t^* = ? \end{cases}$

$x_u < 0$

Wilson - Fisher fixed point

در اینجا هم اصلاح می‌شود.