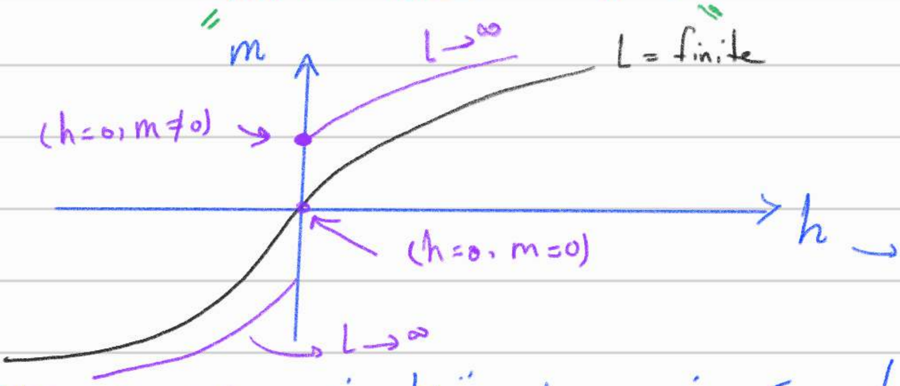
بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۲۹/۹/۱۴۰۱

"Finite Size Effect" — اثر اندازه محدود



$h \to$ میدان مغناطیسی خارجی

☆ انتظار داریم برای سیستم های فرومغناطیس حتی در غیاب میدان مغناطیسی خارجی $m\neq 0$ برای $T<T_c$

☆ در حد ترمودینامیک $\left\{\begin{array}{l} N\to\infty \\ L\to\infty \\ V\to\infty \end{array}\right\}$ این انتظار وجود دارد.

☆ به طور کلی انتظار داریم در اندازه محدود هم نقطه بحرانی T_c و هم نماهای بحرانی و رفتار کمیت های فیزیکی نسبت به حالت $L\to\infty$ (حد ترمودینامیک) تغییر کند. اثر اندازه محدود

☆ شبیه سازی *

☆ در مطالعه سیستم ها

شرایط مرزی دوره ای Periodic Boundary Condition

شرایط مرزی باز Non-Periodic B.C.

در شرط مرزی دوره ای انتظار داریم نظم تصنعی به سیستم القا شود ← $T_c > T_c(\infty)$

در شرط مرزی غیر دوره ای (آزاد) انتظار داریم که بی نظمی تصنعی به سیستم القا شود ← $T_c < T_c(\infty)$

به صورت مدل سازی ریاضی به این دیدگاه میرسیم!

در ادامه RG (ROROI)

$$f_s([K]) = l^{-d} f_s([K'])$$

$[K'] = R_l[K]$ Recursive Relation

یعنی حد ترمودینامیک $L \to \infty$

$L \neq \infty$

$$f_s = \frac{F}{V^{(d)}} \sim f_s(L^{-1}, [K])$$

اندازه محدود است

قبل از آن که

$[K] \to [\bar{K}]$

$\{t, h, u, ..\} \to \{t, h, L, u\}$

ضرایب جفت شدگی شامل اندازه هم می‌شوند وقتی $L \neq \infty$

$\lim_{L \to \infty} L^{-1} = 0$

ضرایب جفت شدگی در واقع کمیت‌هایی هستند که برای رسیدن به نقطه بحرانی باید آنها را تنظیم کنیم.

قس علی هذا
$$\left\{ \begin{array}{ll} t \to 0 & T = T_c \\ h \to 0 & h = h_c \end{array} \right\}$$

اگر با این دید در نظر بگیریم که L (اندازه سیستم) نیز به مجموعه ضرایب جفت شدگی

اضافه شده است پس الان برای رسیدن به نقطه بحرانی جدید باید اثر L را نیز در نظر بگیریم

البته به طور دقیق‌تر اگر بخواهیم ادعا کنیم که L نقش دارد باید بررسی کنیم که آیا x_{size} (ثابت، حالت $L \to \infty$) بزرگتر از صفر است یا خیر؟

$$f_s([K], L^{-1}) = l^{-d} f_s([K'], l L^{-1})$$

$$\begin{cases} x_{old} \to x_{New} = \dfrac{x_{old}}{l} \\ L \to \dfrac{L}{l} \ , \quad L^{-1} \to \dfrac{l}{L} = l L^{-1} \end{cases}$$

$$L^{-1} \Rightarrow L'^{-1} = l L^{-1} = l^{x_{size}} L^{-1}$$

Relevant Coupling constant ← یعنی اثر اندازه $x_{size} = 1 > 0$

فرض کنیم $h = 0$ می‌خواهیم (t, L^{-1}) را بررسی کنیم

پس بخش تکین پتانسیل ترمودینامیکی در حالتی که $L \neq \infty$ به صورت روبرو است

$$f_s(t, L^{-1}) = l^{-d} f_s(l^{x_t} t, l L^{-1})$$

فرض $l^{x_t} t = 1 \to l = |t|^{-1/x_t}$

$t = T - T_c$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{x_t}}$$

$$f_s(t, L^{-1}) = |t|^{d/x_t} f_s(1, \underbrace{|t|^{-1/x_t} L^{-1}})$$

$$\boxed{f_s(t, L^{-1}) = |t|^{2-\alpha} F(X)}$$

$$X \equiv |t|^{-1/x_t} L^{-1}$$

$$X = \frac{|t|^{-\nu}}{L}$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \sim t^{-\alpha}$$

$$\boxed{2 - \alpha = \frac{d}{x_t}}$$

می‌خواهم به این سؤال پاسخ دهم که کجا می‌توانم نقش اثر اندازه محدود را در نظر نگیرم؟

$$f_s(t, L^{-1}) = |t|^{d/y_t} F(X) \qquad X = \frac{|t|^{-\nu}}{L} = |t|^{-\nu} L^{-1}$$

وقتی $L \to \infty$ یعنی $L^{-1} \to 0$ که در این حالت $X \to 0$ نماهای بحرانی به طور دقیق به دست می‌آیند

یعنی در دنیای اندازه درازها منجر اما الان نمی‌توانیم فرض کنیم که $L \to \infty$

L محدود است و $\cancel{X \to 0}$ ولی اگر بخواهیم علی رغم اینکه L محدود است $X \to 0$ یا

$X \ll 1$ در نظر بگیریم باید

$$X \ll 1$$

$$\frac{|t|^{-\nu}}{L} \ll 1 \longrightarrow \boxed{|t|^{-\nu} \ll L}$$

پس برای اینکه بتوانیم سهم اندازه محدود را حذف کنیم باید در دماهایی باشیم که

$$\boxed{|t|^{-\nu} \ll L} \qquad \boxed{\xi \sim |t|^{-\nu}} \longrightarrow \boxed{\xi \ll L}$$

یعنی اثر مرز دیده نمی‌شود

اما نقطه بحرانی طبق تعریف $t \to 0$ پس $|t|^{-\nu} \to \infty$ یعنی $\xi \to \infty$ پس

نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که $\cancel{\xi \ll L}$ داشته باشیم

پس در نقطه بحرانی و خیلی نزدیک به نقطه بحرانی $\cancel{\frac{|t|^{-\nu}}{L} \ll 1}$ یعنی حتما اثر مرز

مهم خواهد بود. یعنی نهایتاً $\frac{|t|^{-\nu}}{L} \gg 1$ و اثر اندازه محدود وجود دارد.

وقتی که $\cancel{L \to \infty}$ در نقاط دور از نقطه بحرانی می‌گیریم از سهم اندازه چشم پوشی کنیم.

اما در همه وضعیت در نقطه بحرانی این امکان وجود ندارد. پس الزاماً finite size effect وجود خواهد داشت. یعنی ردپای اندازه محدود در کمیت‌های ترمودینامیکی وجود خواهد داشت.

به عنوان مثال چه اثری بر C_v و ξ وقتی $\cancel{L \to \infty}$ انتظار داریم؟

$$C(t) = \frac{\partial^2 f_s}{\partial t^2} \quad \text{for} \quad L \to \infty$$

$$C(t, L^{-1}) = \frac{\partial^2 f_s(t, L^{-1})}{\partial t^2} = |t|^{-\alpha} F\left(|t|^{-1/x_1} L^{-1}\right)$$

$$= L^{\alpha/\nu} D(\underbrace{t L^{1/\nu}}_{Y}) \leftarrow \quad lL^{-1} = 1$$

$$\boxed{C(t, L^{-1}) = L^{\alpha/\nu} D(t L^{1/\nu})}$$

عدد محدودی است زیرا L محدود

ظرفیت گرمایی در نقطه بحرانی واگرا می‌شود. ($L \to \infty$) ← انتظار داریم بیشینه شود.

پس تقاضا کنیم که $D(Y = Y_0)$ Maximized

$$Y_0 = t_L L^{1/\nu} \longrightarrow t_L = \frac{Y_0}{L^{1/\nu}} \propto L^{-1/\nu}$$

نقطه بحرانی که به ازای این دما ظرفیت گرمایی بیشینه می‌شود

$t = T - T_c(\infty)$

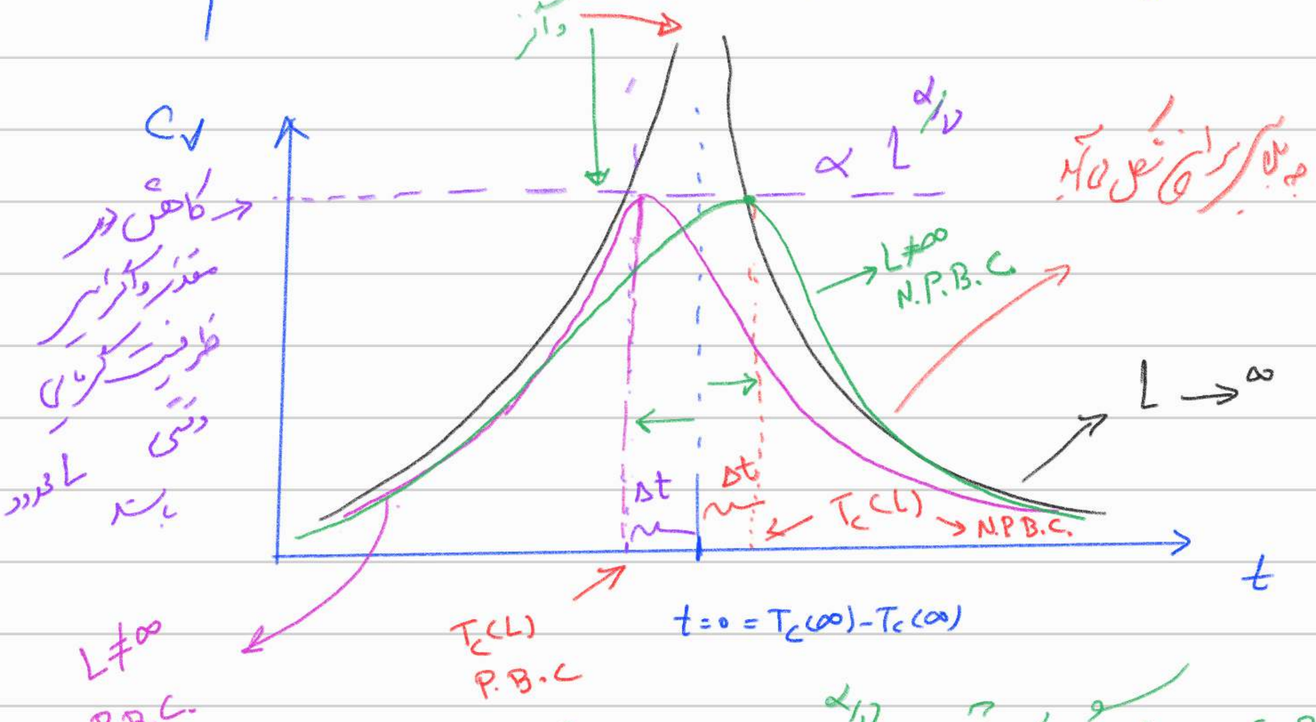
$\lim_{L\to\infty} t = 0 \quad , \quad \lim_{L \not\to \infty} t \propto L^{-1/\nu} \longrightarrow |t_L| \propto L^{-1/\nu}$

انحراف از نقطه بحرانی حد ترمودینامیک $|\Delta t| = |T_c(L) - T_c(\infty)| \propto L^{-1/\nu}$

پس یک جابجایی در نقطه بحرانی داریم

For Periodic Boundary cond. $\Delta t < 0$

For Non-Periodic B.C. $\Delta t > 0$



$C_{Max}(T_c) \propto L^{\alpha/\nu}$ هم بیشینه ظرفیت گرمایی تغییر

$|\Delta t| \propto L^{-1/\nu}$ هم نقطه بحرانی تغییر کرد

$\xi(t, L^{-1}) = l\, \xi(l^{x_t} t, l^{+1} L^{-1})$

$l^{x_t} t = 1 \longrightarrow l = t^{-1/x_t} = t^{-\nu}$

$\ell L^{-1} = 1 \quad - \quad \ell = L$

$$\xi(t, L^{-1}) = t^{-\nu}\, G(L^{-1} t^{-\nu}) = L\, \bar{G}(L t^{\nu})$$

$$\boxed{\lim_{L\to\infty} \xi \sim t^{-\nu} \qquad \xi(t, 0)}$$

قبلاً دیده بودیم وقتی سیستم
اندازه‌ش باشد $L \to \infty$

پس اگر $\bar{G}(L t^{+\nu}) \sim \frac{1}{L t^{\nu}}$ رفتار کند در آن صورت داریم

$$\xi(t, L^{-1}) = L\, \bar{G}(L t^{\nu}) = L \times \left(\frac{1}{L t^{\nu}}\right) \sim t^{-\nu}$$

$$\frac{L}{\xi(t, L^{-1})} = \bar{G}^{-1} \sim (L t^{\nu})$$

$$\frac{L}{\xi(t, L^{-1})} \sim (L t^{\nu}) \sim \left(L\left((L)^{-1/\nu}\right)^{\nu}\right)$$

$$\sim L L^{-1} = 1$$

چه انتظاری داریم $\boxed{\xi \sim L}$

یعنی حتی اگر در $t \neq t_c$ می‌توانستیم از سیستم L صرف کنیم باز در t_c $t \to t_c$ این اتفاق
نمی‌افتد و سیستم اندازه‌ش مهم است

$$\xi(t, L^{-1}) = L\, \bar{G}(L t^{\nu})$$

$$\frac{L}{\xi(t, L^{-1})} = \bar{G}^{-1}(L t^{\nu}) \simeq A + B t L^{1/\nu} + O(t^2)$$

$$\frac{L}{\xi} \sim t\, L^{1/\nu}$$

$$\underline{\underline{t \sim L^{-1/\nu}}}$$

در نقطه بحرانی اصلاح شده

$$\boxed{\xi \sim L}$$

نتیجه مورد انتظار یعنی طول نظم سیستم به اندازه سیستم شود؟

Chapter 5 Kardar's Book

Chapter 12 Goldenfeld's Book

Perturbative RG

با در نظر گرفتن حالتی که نقش اختلالی در هامیلتونی مؤثر دارند نماهای مقیاسی و نقاط بحرانی را حساب کنیم.

$$\underbrace{\mathcal{H}_0}_{\text{Gaussian part}} + \mathcal{U} \leftarrow \text{Perturbative part}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{U}$$

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\mathcal{H}} = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta(\mathcal{H}_0+\mathcal{U})}\right)$$ ① حل تابع پارش

$$F = -K_B T \ln Z$$

RG-flow ← β_ℓ ← $[K'] = R_\ell[K]$ ← RG ② با

تابع مشخصه

Characteristic Function ≡ تبدیل فوریه تابع چگالی احتمال همبسته است

$$\begin{cases} \{A\} : \{\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n\} = \vec{\phi} \\ \{m\} : \{m_1 \dots m_n\} = \vec{m} \end{cases}$$

شکل در مدل Ising

در دو نقطه m_1, m_2

$\downarrow \quad \downarrow$

$+1 \quad -1$

$$\rightarrow \langle F \rangle = \int d^nA \, \underbrace{\overset{\text{مشاهده پذیر}}{F(A)}}_{} \, \underbrace{\overset{\text{تابع توزیع}}{P(A)}}_{\text{n-Joint PDF}}$$

یک کمیت مشاهده پذیر دلخواه

در فیزیک مهم است

باید این کمیت را داشته باشیم

برای اینکه $P(A)$ حساب کنیم از تابع مشخصه کمک می‌گیریم

کمیت کلی

$$\text{تابع مشخصه} \quad Z_{\phi}(\vec{\lambda}) \equiv \langle e^{i\vec{\lambda}\cdot\vec{\phi}} \rangle$$

تبدیل فوریه تابع $P(\phi)$ است

$\boxed{\text{for } n=1}$

$$Z_\phi(\lambda) = \langle e^{i\lambda\phi} \rangle = \int d\phi \, e^{i\lambda\phi} P(\phi)$$

?

$$* \quad Z_\phi(\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^l}{l!} M_\phi^{(l)} = 1 + i\lambda\langle\phi\rangle - \frac{\lambda^2}{2!}\langle\phi^2\rangle + \dots$$

$M_\phi^{(l)} = \langle \phi^l \rangle$: moment ← ام l

$$Z_\phi(\lambda) = \exp\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^l}{l!} K_\phi^{(l)} \right) \quad *$$

$$K_\phi^{(1)} = \langle \phi \rangle = M_\phi^{(1)}$$

$$\sigma_\phi^2 \equiv K_\phi^{(2)} = \langle \phi\phi \rangle - \langle \phi \rangle^2 = M_\phi^{(2)} - \left[M_\phi^{(1)}\right]^2$$

$$= \langle \phi\phi \rangle_{\text{Connected moment = Cumulent}}$$ گشتاور

برای λهای کوچک (Z تابع بسیار نرمی از λ است)

$$\begin{cases} M_\phi^{(l)} = \dfrac{d^l}{d(i\lambda)^l} Z_\phi(\lambda) \Big|_{\lambda=0} \\[2ex] \boxed{K_\phi^{(l)} = \dfrac{d^l}{d(i\lambda)^l} \ln Z_\phi(\lambda) \Big|_{\lambda=0}} \end{cases}$$

هیچ فرضی در خصوص مقادیر $M_\phi^{(l)}$ و $K_\phi^{(l)}$ نداریم

در خصوص میدان‌های گوسی Gaussian field و با در نظر گرفتن $M_\phi^{(1)} = 0$ (یعنی میانگین را صفر در نظر می‌گیریم)

$$\underbrace{K_\phi^{(l)} = 0 \qquad l \geq 3}$$

$$M_\phi^{(1)} = \langle \phi \rangle = 0$$

برای میدان گوسی $\sigma_\phi^2 = K_\phi^{(2)} \neq 0$

$$p(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2}} e^{-\frac{\phi^2}{2\sigma_\phi^2}}$$

$$\begin{cases} n=1 \qquad p(\phi) = (2\pi) \int d\lambda \, e^{-i\lambda\phi} Z_\phi(\lambda) \\[2ex] n \neq 1 \qquad p(\vec{\phi}) = (2\pi)^n \int d^n\vec{\lambda} \, e^{-i\vec{\lambda}\cdot\vec{\phi}} Z_{\vec{\phi}}(\vec{\lambda}) \end{cases}$$

پس با داشتن $M_\phi^{(l)}$ یا $K_\phi^{(l)}$ می‌توان Z_ϕ را به دست آورد و بعد با تبدیل فوریه معکوس، $p(\vec{\phi})$ به دست می‌آید

$$\langle F \rangle = \int d^n \phi \, F(\vec{\phi}) \, P(\vec{\phi})$$

$$= \left\langle e^{\sum_{l=3}^{\infty} \frac{1}{l!} \left\{ \underbrace{\sum_{\mu_1}^{n} \cdots \sum_{\mu_l}^{n}}_{il} K^{(l)}_{\mu_1 \cdots \mu_l} \frac{\partial^l}{\partial \mu_1 \partial \mu_2 \cdots \partial \mu_l} \right\}} F \right\rangle_G$$

$$\langle F \rangle_0 + \langle \quad \rangle_0$$

$$\langle F \rangle = \langle F \rangle_G + \left\langle \underbrace{\sum_{l=3}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{\mu_1}^{n} \cdots \sum_{\mu_l}^{n} K^{(l)}_{\mu_1 \cdots \mu_l} \left(\frac{\partial^l}{\partial \mu_1 \cdots \partial \mu_l} \right) F \right)}_{O} \right\rangle_G$$

$$+ \mathcal{O}(\sigma_\phi^2)$$

در کنش خودمان

$\xleftarrow{\text{Gauss}}$

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{U}$

در اینجا $\mathcal{U}$ وجود دارد

$$\begin{cases} Z = \int D^n \phi \, e^{-\beta \mathcal{H}} \\ Z = \int D^n \phi \, e^{-\beta \mathcal{H}_0} \, e^{-\beta \mathcal{U}} \end{cases}$$

در $\mathcal{U}=0$ فقط $\mathcal{H}_0$ داریم پس Z_0 تعریف می‌کنیم

$\mathcal{U}=0$

$$\begin{cases} Z_0 = \int D^n \phi \, e^{-\beta \mathcal{H}_0} \\ Z_0 = \int D^n \phi \, e^{-\beta \underbrace{\int d^d x \, d^d y \, \frac{1}{2} \phi^T(x)_{1\times n} \cdot \mathrm{Cov.}_{n\times n} \, \phi(y)_{n\times 1}}_{\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{\text{Gaussian}}}} \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{\sqrt{\beta \, \mathrm{Det}(\mathrm{Cov})}}$$

$$Z_0(\lambda) = \int D^n\phi \, e^{-\beta \mathcal{H}_0 + \int d^d x \, \vec{\lambda}(x) \cdot \vec{\phi}(x)}$$

ϕ^2 نقش h را بازی می‌کند.

$$\boxed{Z_0(\vec{\lambda}) = \frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{\sqrt{\beta \, \mathrm{Det}(\mathrm{Cov})}} \, e^{\frac{1}{2} \lambda^T_{1\times n} \cdot \mathrm{Cov}^{-1}_{n\times n} \cdot \lambda_{n\times 1}}}$$

$$\begin{cases} m - \langle \phi_i \rangle_{\text{Connected}} = \langle \phi_i \rangle = \left. \dfrac{\partial \ln Z_{0\phi}(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_i} \right|_{\vec{\lambda}=0} \\[2ex] \langle m_i m_j \rangle \quad \underbrace{\langle \phi_i \phi_j \rangle_{\text{Connect}}}_{} = \left. \dfrac{\partial^2 \ln Z_{0\phi}(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_i \, \partial \lambda_j} \right|_{\vec{\lambda}=0} \end{cases}$$

Green's funct
Response funct

یادآوری

$$\langle F \rangle_{\mathcal{H}} = ? \qquad \langle F \rangle_{\mathcal{H}_0} = \checkmark$$

$$\underbrace{\langle F \rangle_{\mathcal{H}}}_{} = \langle F \rangle_{\mathcal{H}_0} + \langle O F \rangle_{\mathcal{H}_0} + \cdots$$

هزینه‌ی محاسبه‌ی متوسط F روی $\mathcal{H}$ به تبدیل $F \to OF$ روی $\mathcal{H}_0$ داده‌ایم.

اصلاحات

$$Z = \int D^n\phi \, e^{-\beta \mathcal{H}} = \int D^n\phi \, e^{-\beta(\mathcal{H}_0 + \mathcal{U})}$$

$$= \frac{\int D^n\phi\, e^{-\beta\mathcal{H}_0}\, e^{-\beta\mathcal{U}}}{\int D^n\phi\, e^{-\beta\mathcal{H}_0}}$$

$$\underbrace{\int D^n\phi\, e^{-\beta\mathcal{H}_0}}_{Z_0(\lambda=0)}$$

$$Z = \underbrace{\langle e^{-\beta\mathcal{U}}\rangle_0}\, Z_0$$

در حالت‌هایی این کار با اختلال خراب می‌شود

$\mathcal{U}$ اختلالی است (فرض ما است)

$\beta\mathcal{U} = 0$ جواب داده شود

$$Z = Z_0\left[1 - \beta\langle\mathcal{U}\rangle_0 + \frac{\beta^2}{2!}\langle\mathcal{U}^2\rangle_0 - \frac{\beta^3}{3!}\langle\mathcal{U}^3\rangle_0 + \cdots\right]$$

پس برای محاسبه Z نیاز داریم که

$$\boxed{? = \langle\mathcal{U}^n\rangle_0}$$

عملگر مشاهده پذیر دلخواه

$$\langle O\rangle = \frac{\int D^n\phi\, O\, e^{-\beta\mathcal{H}}}{\underbrace{\int D^n\phi\, e^{-\beta\mathcal{H}}}_{Z}} = \frac{?}{Z_0\left[1 - \beta\langle\mathcal{U}\rangle_0 + \cdots\right]}$$

جلسه بعد مجددا برمی‌گردیم

جلسه بعد محاسبه می‌کنیم

مغناطش $\langle m\rangle$

تابع $\langle m_i m_j\rangle$

نماهای مقیاسی

و خواص بحرانی