بسم الله الرحمن الرحیم   جلسه ۲۴/۸/۱۴۰۱

Landau - Ginzburg - Wilson Theory (II)

(1) $Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{Intraction}}$

$F = -K_B T \ln Z$ and $f_\Omega = \dfrac{F}{V^d}$

(2) درخصوص آنچه که پدیده‌های بحرانی نامیم (گذار فاز) توابع ترمودینامیک رفتار تکینی دارند

$t=0$ در نقطه بحرانی

$$\boxed{t \equiv \frac{T-T_c}{T_c}}$$

$M \propto (-t)^{\beta}$

$$\left\{\begin{array}{l} \chi \propto (t)^{-\gamma} \\ C_H \propto |t|^{-\alpha} \\ \xi \propto t^{-\nu} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} t>0 \\ \gamma, \alpha, \nu > 0 . \end{array}$$

همچنین توسط توابع مقیاسی مدل می‌شوند. این توابع مقیاسی دارای نماهای مقیاسی هستند

Scaling Exponents

$$\boxed{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu, \eta, \ldots}$$

و کلاس‌های جهانشمولی محدود وجود دارند.

افت‌وخیزها در نزدیکی نقطه بحرانی و خود نقطه بحرانی یک سری ویژگی‌های عام در سراسر سیستم ایفای نقش می‌کنند

$\left\{\begin{array}{l} \text{Global Properties} \\ \text{Collective behavior} \end{array}\right\} \longrightarrow K \to 0 \,, \ \Lambda \to \infty \ (L)$

$$Z = Z_{<}\, \tilde{Z}_{>}^{\Lambda}$$

RG

$K \in [\Lambda^{-1}, a^{-1}]$

$x \in [a, \Lambda]$

$$\begin{cases} K \in [0, \Lambda^{-1}] \\ x \in [\Lambda, \infty] \end{cases}$$

UV-Cutoff

منجر به ایجاد خواص کلی در توابع ترمودینامیک می‌شود

$$a \ll \Lambda \sim \underbrace{\xi}_{} \sim L$$

Typical Length Scale

System Size

unit cell

Correlation length scale

(3)
$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}_{microscopic}} \longleftrightarrow W_\Lambda = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}_\Lambda}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$F = -K_B T \ln Z \qquad\qquad F_\Lambda = -K_B T \ln W_\Lambda$$

Λ طولی که سیستم را با آن دانه درشت کردیم

Coarse grain

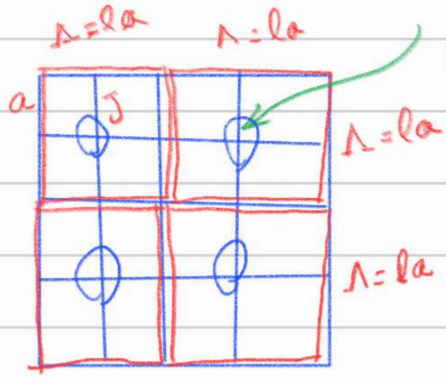
$$Z \overset{?}{=} W_\Lambda$$

$$F \overset{?}{=} F_\Lambda$$

☆ چه اشتباهی داره؟

☆ آیا می‌توانند نماینده مناسبی برای استخراج خواص سیستم در نزدیکی و خود نقطه بحرانی باشند؟

(4)



$m_\Lambda(\vec{x})$

Window function

Kernel

$$m_\Lambda(\vec{x}) = \int d\bar{x}'\, K_\Lambda(x - x')\, S(x')$$

$$K_\Lambda(x - x') = \delta_D(x - x')$$

$$Z = Tr\left(e^{-\beta \mathcal{H}_{microscopic}}\right)$$

$$m_\Lambda(x) = S(x)$$

$$W_\Lambda(x) = Tr\left\{ e^{-\beta \mathcal{H}_{microscopi}} \overbrace{\delta_D\left[\sum_{i\in x} S_i - m_\Lambda(x) N_\Lambda(x)\right]} \right\}$$

$$m_\Lambda(x) = \frac{1}{N_\Lambda} \sum_{i\in x}^{N_\Lambda} S_i \longleftarrow \text{Constrain}$$

قید

پس با درنظر گرفتن Λ دانه درشت کردن بخش از پیکربندی که درنظر گرفته نمی شوند پس

$Z \neq W_\Lambda$ است

$$Z = Tr\, e^{-\beta \mathcal{H}_{mic.}} \neq \sum_x W_\Lambda(x)$$

(5) $$Z = \sum_{\{S\}} e^{-\beta \mathcal{H}_{mic}}$$

$$\{S\} : \{S_1, S_2 \; . \; . \; S_N\}$$

$$: \{S\}' + \{S\}''$$

$$\delta_D\left[\sum S_i - m_\Lambda N_\Lambda\right]$$

آن دسته از پیکربندی هایی که دارای قید هستند

بقیه پیکربندی ها

Ex: $N = 3$ $\quad S_i = \pm 1$ $\quad \mathcal{N} = 2^3 = 8$ $\quad \{S\}' \leftarrow$ قید (+)

$$\{S\} : \{ \{+1,+1,+1\}, \{+1,+1,-1\}, \{+1,-1,+1\},$$
$$\{+1,-1,-1\}, \{-1,+1,+1\}, \{-1,+1,-1\},$$
$$\{-1,-1,+1\}, \{-1,-1,-1\} \}$$

$$\mathrm{Tr} \equiv \sum_{\{s\}} = \sum_{\{s\}'} \sum_{\{s\}''}$$

$$Z = \sum_{\{s\}} e^{-\beta \mathcal{H}_{mic}} = \sum_{\{s\}''} \overbrace{\sum_{\{s\}'} e^{-\beta \mathcal{H}_{mic}}}$$

$$Z = \sum_{\{s\}''} W_\Lambda$$

⑥

$$\begin{cases} S_i \longrightarrow m(x) \quad (\text{field}) \\ \sum_i \longrightarrow \int \frac{d^d x}{a^d} \\ \sum_{\{\}} \longrightarrow \int \prod_{i=1}^{N} ds_i = \int \mathcal{D} m \end{cases}$$

$$Z = \sum_{\{s\}''} W_\Lambda = \int \mathcal{D} m_\Lambda \, e^{-\beta \mathcal{H}_\Lambda [m_\Lambda]}$$

Coarse graining Hamiltonian

$$e^{-\beta F} = \int \mathcal{D} m_\Lambda \, e^{-\beta \mathcal{H}_\Lambda [m_\Lambda]}$$

سایر خواص ترمودینامیکی را حساب کنیم.

پس مسئله ما تبدیل شد به محاسبه $\mathcal{H}_\Lambda$ (دانه درشت شده است)

اما مشکل اصلی این است که در اغلب مسائل محاسبه ابتدا به ساکن $\mathcal{H}_\Lambda$ ساده‌تر از محاسبه مستقیم Z نیست!

(7) Phenomenological Description as starting Point

$$e^{-\beta F} = Z = \int Dm \, e^{-\beta L_\Lambda [m]}$$

$$\underbrace{L_\Lambda [m]} = \int \frac{d^d x}{a^d} \, \underbrace{\mathcal{L}[m, \partial_x m, \ldots]}$$

locality ☆
symmetry ☆
stability ☆

لانداو - گینزبورگ

سطح

Landau - Ginzburg potential
or Landau free Energy.

$$e^{-\beta F} = \int Dm \, e^{-\beta L_\Lambda [m]}$$

$$[m] = [m]_0 + [\Delta m] = [m]_0 + [\psi]$$

$$L[m] = L[m]_0 + [\psi] \left. \frac{\partial L}{\partial [m]} \right|_{[m]=[m]_0} + [\psi]^2 \left. \frac{\partial^2 L}{\partial [m]^2} \right|_{[m]=[m]_0} + \ldots$$

$$e^{-\beta F} = \widetilde{e^{-\beta L[m]_0}} \underbrace{\int Dm \, e^{-\beta [\;\ldots\;]}}$$

Zero order app. $\boxed{F \sim L[m]_0 \quad \text{Landau free Energy}}$

8

$$L[m]$$
$$\downarrow$$
$$\mathcal{L}[m, \partial_x m, \dots]$$

ویژگی های عمومی

رویکرد ما شروع از توصیف پدیده شناختی است.

$\bar{x} : (x_1, \dots x_d) \in \mathbb{R}^{(d)}$ d- Dimension

$\bar{m}(\bar{x}) : (m_1(\bar{x}), m_2(\bar{x}), \dots m_n(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{(n)}$ n-field

n-field in d- dimension

$\boxed{\text{Ising in 1-D} \longrightarrow d=1 \;,\; n=2}$ برای مثال

$$W = e^{-\beta L[m]}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L[m] = -K_B T \ln W \\ F = -K_B T \ln Z \end{array} \right\} \longleftarrow \text{Landau free Energy}$$

(A) Locality and Uniformity

$$L[m] = \int d^d x \, \mathcal{L}[m, \partial_x m]$$

از بخش های مختلف سیستم اطلاعات کسب می‌کند

$$W = \prod_i W_i$$

احتمال

(B) Analytically and Polynomial Exponent of [m]

$$\mathcal{L}[m] = \sum \left\{ a_n([K])\, m^n + b_n([K])(\nabla m)^n + \cdots \right\}$$

$$L[m] = \int d^d x\, \mathcal{L}[\quad]$$

چرا این چنین فرمی

$$W = e^{-\beta L[m]}$$

نقش احتمال را بازی می‌کند

از نکات مبتنی بر قضیه حد مرکزی هم می‌توان انتظار داشت که L را تابعی از m^2 باشد.

Gaussian approximation تقریب گوسی

$$f = a_0 + a_2 m^2 + a_4 m^4$$

پایداری

$$m = \pm \sqrt{\frac{-a_2}{a_4}}$$

گوسی خوب کار می‌کند

مدل گوسی → $m = 0$ $\quad t > 0$

در مدل گوسی خوب نیست $m \neq 0$ $\quad t < 0$

و نیاز به اولین اصلاح داریم

یعنی جمع $a_4 m^4$

$[\lambda \phi^4]$ کاربرد داره

(C) Symmetries

تقارن‌های سراسری هستند

(تقارن‌های پیوسته معدودی وجود دارند)

m : order Parameter

$[K]$: Coupling Constants (t, h, u)

(D) Stability

$$e^{-\beta L[m]}$$

$$\mathcal{L} = \sum \left\{ a_n[K]\, m^n + b_n[K](\nabla m)^n + \cdots \right\}$$

ضرایب باید به شکلی باشند که منجر به جواب غیرفیزیکی نشوند

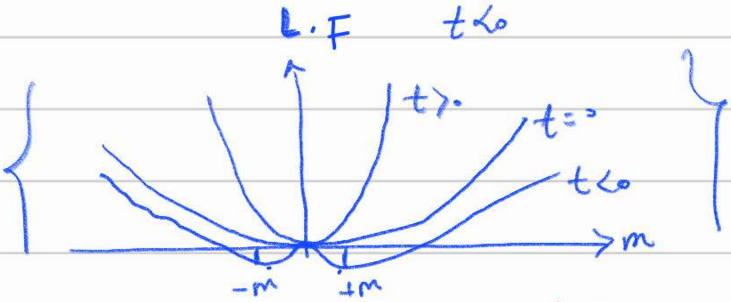
Second order phase Transition

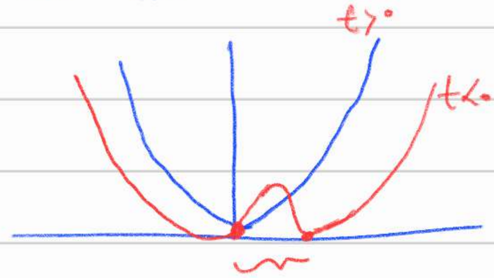
$$L = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3 + a_4 m^4 \dots$$

Z_2-symmetry $\quad a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$

$a_4 \neq 0 \;, a_4 > 0 \qquad m = \pm\sqrt{\dfrac{-a_2}{a_4}}$

$a_2 = t$ (از نظریه میدان متوسط یادآوری کردیم)





first order phase Transition

Ex: Zero app. , $Z \simeq e^{-\beta L[m]_0} = e^{-\beta F}$

جایی که L را کمینه می‌کند

اگر یک مسئله متقارنی $[m]_0$ جواب متوسط متقارن است

$$L[m] = L[m]_0 + [\psi] \underbrace{\frac{\partial L}{\partial [m]}}_{0} + O([\psi]^2)$$

$$Z = \int Dm\, e^{-\beta L[m]} = e^{-\beta L[m]_0} \underbrace{\int Dm\, e^{-\beta [\psi]^2 \frac{\partial^2 L}{\partial [m]^2} + \dots}}_{\text{تقریب گوسی}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z \simeq e^{-\beta L[m]_0} \\ F = L[m]_0 \end{array} \right\}$$

در تقریب صفرم

$$m = \frac{\partial Z}{\partial H}\Big|_{H=0} = -\frac{\partial F}{\partial H}\Big|_{H=0}$$

$a_1 \neq 0$

If $H \neq 0$ $\quad L[m]_0 \longrightarrow L[m]_0 - H[m]_0$

$$Z \sim e^{-\beta L[m]_0 + \beta H [m]_0}$$

در تقریب صفرم بحضور میدان خارجی

$$F \simeq \underbrace{L[m] - H\times[m]}$$

اکسترمم

$$0 = \frac{\partial F}{\partial [m]} \longrightarrow [m]_0$$

$$0 = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial [m]}}_{\text{اکسترمم}} = \underbrace{\frac{\partial L[m]}{\partial [m]}}_{\text{در تقریب صفرم داریم اینجا هم}} - H = 0 \implies \boxed{\frac{\partial L[m]}{\partial [m]}\Big|_{[m]} = +H}$$

چون $H \neq 0$

$$[m]_0 = -\frac{\partial F}{\partial H} = -\frac{\partial}{\partial H}\left[L[m]_0 - \underbrace{H\times[m]_0} \right]$$

$$[m]_0 = -\frac{\partial L[m]_0}{\partial H} + [m]_0 + H \frac{\partial [m]_0}{\partial H}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial [m]_0}\frac{\partial [m]_0}{\partial H} + [m]_0 + H \frac{\partial [m]_0}{\partial H}$$

$$= -H \cancel{\frac{\partial [m]_0}{\partial H}} + [m]_0 + H \cancel{\frac{\partial [m]_0}{\partial H}}$$

دستی شناختیم (مغناطش) $[m]_0 = [\phi]_0$

$[m]_0 = [m]_0$

نتیجه در ترکیب صفر بدون حضور میدان مغناطیسی جایی که L (Landau Energy)
کمینه می‌شود معادل همان مغناطشی است که تابع F را کمینه می‌کند (همان مغناطش است)

جمع‌بندی نهایی:

$$a \ll \Lambda \lesssim \xi \sim L$$

$$m_\Lambda = \int \frac{d^d x'}{a^d} K(x-x') S(x')$$

$$W_\Lambda(x) \longrightarrow Z = \int Dm_\Lambda W_\Lambda$$

$$e^{-\beta F} = Z = \int Dm_\Lambda \, e^{-\beta L_\Lambda[m]}$$

شناختی
بصورت پدیده

$$L_\Lambda[m] = \int \frac{d^d x}{a^d} \mathcal{L}[m, \partial_x m \cdots]$$

(A) locality

(B) Analyticity

(C) symmetries

(D) stability

$$\boxed{\text{Landau free Energy}}$$

$$\mathcal{L} = \sum [a_n([K]) m^n + \cdots]$$

Scalar model.

$$L[\phi] = \int \frac{d^d x}{a^d} [a_0 + \underbrace{a_2 \phi^2}_{\text{mass}} + \underbrace{a_4 \phi^4}_{\text{Intraction}} + (\nabla \phi)^2]$$

Z-Symmetry $a_i = 0$

Kinetic Energy