بسم الله الرحمن الرحیم   جلسه   ۱۴/۷/۱۴۰۱

مقدمات درس پدیده‌های بحرانی و میدان‌های آماری.

تاریخچه و نقشه راه درس

① علم فیزیک: علم مطالعه کمّی پدیده‌های طبیعت با زبان ریاضیات و تجهیزات

$P, V, T, \vec{E}, \vec{B}$

Macroscopic Coordinates

② نقطه شروع مطالعه و توصیف فرآیندها: توصیف ماکروسکوپیک

اثرات متجلی از مقیاس میکروسکوپیک

microscopic coordinates مختصات‌های میکروسکوپیک

$\rho(\vec{r}_i, t) \Rightarrow$ probability of finding a partice at $\vec{r}_i$ at t

③ ترمودینامیک یکی از دستگاه‌های توصیف ماکروسکوپیک است

Phenomenological Description   توصیف پدیده‌شناختی

Effective Theory   نظریه مؤثر

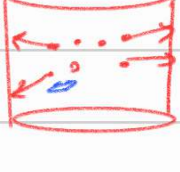
بسته به اینکه در خصوص مطالعه چه رفتاری در چه مقیاسی کار می‌کنیم از جزئیات نامربوط صرف نظر می‌کنیم

Irrelevant Details

☆ Elasticity Behavior

کتاب کاردی فصل اول.

$P = \frac{F}{A} \rightarrow$



☆ فشار

Emergent Behavior

$$P = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t \Delta A}$$

حرکت کردن مختلف در سطح مولکولی

یک رفتار مؤثر تعریف کردم

در مقیاس ماکروسکوپیک با یکی از مشخصات ماکروسکوپیک که P است آن را کمّی کردم

$$\underbrace{PV = NKT} \leftarrow \boxed{\text{Ideal Gas}}$$

در ترمودینامیک بیان ← چرا؟

پاسخ داده نمی‌شود

→ به همین دلیل علم ترمودینامیک

علم پدیده‌شناختی

چیستی و چرایی ← جلوگیری

تبیین نمی‌کند ←

فقط کاری کند.

$$\boxed{PV = NKT}$$

$$\boxed{U = \frac{3}{2}NKT}$$

اولین مرحله ورود به دیگر جزئیات

$$V \longrightarrow V - nb$$

$$P \longrightarrow P + a\left(\frac{n}{V}\right)^2$$

ضریب باید اندازه‌گیری شود.

$a > 0 \leftarrow$ Attractive force

$a < 0 \leftarrow$ Repulsive force

$$\boxed{\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = NKT}$$

Van-der Waals Law

۴) اواخر قرن ۱۹ و اوایل قرن ۲۰ ← نگاه Atomistic در مقابل Holistic

جزءگرایانه — کل‌گرایانه

حل چالش‌های موجود در توصیف ترمودینامیکی ← Thermodynamical Equilibrium تعادل

تمرکز بر مطالعه سیستم‌های در حال تعادل - شبه تعادل

فراگیر شد ←
- Emergent Behavior
- Phase Transition
- out of Equilibrium

ذیل درس پدیده‌های بحرانی فرا می‌گیرید.

☆ Thermal Equilibrium

☆ Mechanical Equilibrium

☆ Chemical Equilibrium

→ درس مکانیک آماری پیشرفته 1

⑤ نگاه فردگرایانه به شناخت قوانین حاکم بر اجزای مواد تکمیل شد ←

Probabilistic   احتمالاتی

در تولید علم مکانیک آماری بکار گرفته می‌شود.

⑥ سئوال دوم: چگونه اجزای یکسان در سطح میکروسکوپیک در سطح ماکروسکوپیک اینقدر تنوع ماده و رفتارهای متفاوت داریم

Emergent of New Collective behavior of Macroscopic scale from dynamics of microscopic particles

Impossibility of Computing

Macroscopic behavior by Considering

Individual Particle's Dynamics

1 mole ~ 10^{23} → معادله حل شه

قابل انجام نیست → منطقی به نظر نمی‌رسد

در مقیاس های مختلف قبلا تجربه کردیم

{ Irrelevant Quantity } خیلی از جزئیات

Integrate out → جمع زدن

Marginalization → بی‌اثرسازی

Coarse graining → دانه درشت کردن

اولین مولفه گروه‌های بازبهنجارش

(RG) Renormalization groups

$$RG = R \circ \overset{\text{Rescale}}{R} \circ I$$

R → Renormalize

I → Coarse graining

Kernel Estimation

Convolution پیچش

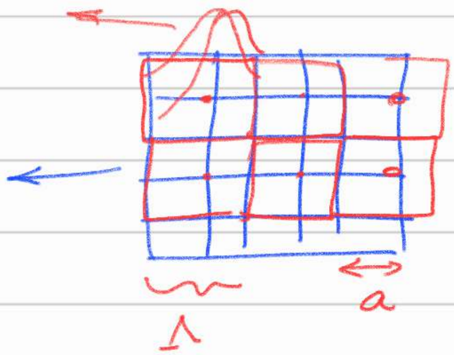
$$f(x) \rightarrow F(x)$$

$$F(x) = \int dx' \, \underbrace{\underset{\Lambda}{K}(x-x')}_{\delta_D(x-x')} f(x') \longrightarrow \tilde{F}(K) = \underline{\tilde{K}(K)\tilde{f}(K)}$$

K → عدد موج

$F(x) = f(x)$

K



$f(x) = K \otimes f$

$a \; , \; \Lambda \; , \; L \quad \leftarrow \quad a < \Lambda < L$

a → Unit cell

L → System size

$\Lambda \sim \xi$ (Correlation Length)

Scale

Step-by-step (ab-initio) derivative of Macroscopic Properties from microscopic Equation of motion is impossible

۸) نقش مکانیک آماری به معنای پاسخ به چیستی و چرایی ارتباط ابعاد افت‌وخیزی و تصور کلی‌گری بررسی کمیت‌های مشاهده‌پذیر و توجه به سیستم‌های در نزدیکی نقطه بحرانی

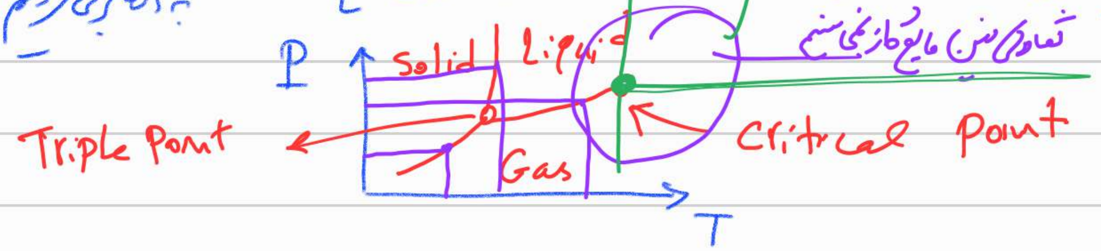
به عنوان کلیدواژه به دنیا برگردیم

Critical Point

[Second order Phase Transn]

supercritical Phase

$\begin{cases} T_c = 373.946\,^{\circ}C \\ P_c = 217.7\ atm \end{cases}$



(۹) در ترمودینامیک نقطه شروع ← مقیاس ماکروسکوپیک است

در مکانیک آماری نقطه شروع ← مقیاس میکروسکوپیک است. با این رویکرد

یعنی خواص در مقیاس ماکروسکوپی، با مطالعه جزئیات آن در گام منطقی بعدی هست

در مکانیک آماری توجه؛ ویژگی های انرژی ریزحالت ها مبنی بر آمار و احتمال است

microstate

در وضعیت تعادل آن آرایشی رخ می دهد که تعداد ریزحالت های بیشتری داشته باشد؛

اصل بیشینه آنتروپی است.

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}} = \sum_{\{\}} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

جمع روی پیکربندی های مختلف

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$$

$$\rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \qquad \mathcal{H}_I = 0$$

در حل درس مکانیک آماری ۱

$$U = F + TS$$

$$-\frac{\partial F}{\partial T} = S$$

$$\underbrace{\left\{ \frac{\partial F}{\partial H} = M = \langle S \rangle \right\}}_{\text{یادآوری}}$$

$$F = -k_B T \ln Z$$

Exercise

پتانسیل ترمودینامیکی را بدست می آوریم

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma\text{-space} \rightarrow 6N\text{-Dim} \\ \mu\text{-space} \rightarrow 6\text{-Dim} \quad (q,p) \end{array} \right.$$

دلیل تنوع را کم می کنیم

$$\langle X \rangle = \int d\Gamma \; X \; \rho \qquad \rho \in \{\rho_{mc},\ \rho_c,\ \rho_{gc}\}$$

$$\rho_{\text{canonical Ens}} = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}(\Gamma)}}{Z}$$

احتمال رخ دادن یک پیکربندی از فضای فاز

$$Z = \int \frac{d^{3N}q \, d^{3N}p}{N! \, h^{3N}} \, e^{-\beta \mathcal{H}(\{q,p\})}$$

Ideal Gas $\quad \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}$

$$Z = \underbrace{\int d^{3N}q}_{} \int \frac{d^{3N}p}{N! \, h^{3N}} \, e^{-\beta \mathcal{H}(\{p\})}$$

$$\frac{V^N}{N!} \frac{1}{\lambda^{3N}} = \left(\frac{L^3}{\lambda^3}\right)^N \frac{1}{N!} \leftarrow \text{Gibbs correction factor}$$

$$\lambda \equiv \left(\frac{h^2}{2\pi m k T}\right)^{1/2}$$

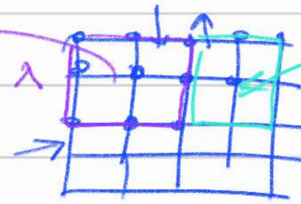
$$Z \longrightarrow Z_\Lambda = \int D\phi \, e^{-\beta L_\Lambda[\phi_\Lambda]}$$

یادآوری. یک سیستم اسپینی

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{-\beta \mathcal{H}} \qquad [K] \qquad \mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j$$

$$\{S\} : \left\{ \{S_1^{(1)}, S_2^{(1)} \ldots S_N^{(1)}\}, \{S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \ldots S_N^{(2)}\} \ldots \right\}$$

S_1 $\phi_\Lambda(x_1)$



$\phi_\Lambda(x_2)$ S_2

Λ

$J \rightarrow$

$$S_i \longrightarrow \phi_\Lambda(x) \qquad = -J\, S_1 S_2$$

$$\rightarrow -J_\Lambda\, \phi_\Lambda(x_1)\, \phi_\Lambda(x_2)$$

$$\phi_\Lambda(x) = \int dx'\, \underbrace{W_\Lambda(x-x')}\, S(x')$$

$$\phi \to S$$

$$\leftarrow \delta_D(x-x') \longleftarrow \text{window function}$$

$$\lim_{\Lambda \to 0} W_\Lambda(x-x') = \delta_D(x-x') \longrightarrow \phi_\Lambda(x) \to S(x) = S_i$$

$$\sum_{\{S\}} \;\text{——}\; \int \mathcal{D}\phi \qquad \underbrace{\text{Landau - Ginzburg}}_{\text{نظریه مؤثر}}$$

$$\sum_i \longrightarrow \int d^d x$$

بدیهی نیست

$$S_i \;\text{——}\; \phi \quad , \quad \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_\Lambda \equiv L_\Lambda[\phi]$$

$$Z \longrightarrow Z_\Lambda = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-\beta L_\Lambda[\phi]}$$

$$L_\Lambda[\phi_\Lambda] = \int d^d x\, \mathcal{L}(\underbrace{\phi, \partial\phi, \ldots})$$

آنتروپی ← جملات انرژی ←

Λ = Coarse grain scale

تقارن‌های مسئله
موضعی بودن
تحلیلی بودن

$$L_\Lambda \longrightarrow F$$

مفهوم کلاس جهانشمولی

Perturbation

$$\rightarrow L_\Lambda = L_0 + L_1 + \ldots$$

Universality class

Self-similarity — خود متشابه بودن در نقطه بحرانی

Symmetry

$\longrightarrow$ Universality Class

Computing Scaling Exponent

رفتار مقیاسی $\longleftarrow$ Scaling Behavior

Widom Scaling Hypothesis — فرض مقیاسی بودن

Homogenouse function — تابع همگن

Power-law $\longleftarrow$ scaling $\longleftarrow$ Self-Similar

$$\phi(x) \quad , \quad x \longrightarrow bx$$

$$\phi(x) \longrightarrow \boxed{\phi'(bx) \triangleq b^{\alpha}\phi(x)}$$

Exponent

$$\frac{\phi(2x)}{\phi(x)} = \frac{\phi(4x)}{\phi(2x)} \longrightarrow \text{Scale-free Property}$$

$$\text{در نقطه بحرانی}\quad \mathcal{H}\Big|_{\text{critical Point}} = \mathcal{H}_{\Lambda}\Big|_{\text{critical point}} \longrightarrow$$ نماهای مقیاسی را محاسبه کنیم

$$Z = Z_{\Lambda} \longrightarrow F = F_{\Lambda} \longrightarrow$$ با چنین معادله‌ای نماهای مقیاسی استخراج می‌شوند

ترمودینامیک

افت و خیز

مکانیک آماری

چیزهایی که در درس پدیده‌های بحرانی یاد خواهیم گرفت. — جدا از مودینامیک

در نزدیکی نقطه بحرانی

محاسبه نقطه بحرانی
محاسبه نماهای بحرانی

$$F(t,h) = l^{-d} f(l^{x_t} t, l^{x_h} h)$$

Power-law

$x_t = ?$, $T_c \rightarrow$ $t = \frac{T - T_c}{T_c}$

$x_h = ?$

$t = 0 \Rightarrow T = T_c$

$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_l$

شار RG را نشان می‌دهد.

$[K] \longrightarrow [K'] = R_l[K]$

ضرایب موجود در هامیلتونین

$(H(J))$

Coupling Constants

در نقطه بحرانی

$$\boxed{[K^*]_{T=T_c} = [K']_{T=T_c} = R_l[K]\Big|_{T=T_c}}$$

fixed Point

$T_c = \checkmark$

β-function method

نقاط جاذب را نشان می‌دهد. $\beta_l = -\frac{\partial K}{\partial l}\Big|_{K=K^*} = 0$

با در نظر گرفتن شرایط دوره‌ای Periodic Boundary Condition یعنی به صورت تصنعی

نظم را افزایش داده‌ایم پس $T_c > T_c(\infty)$ — وقتی اندازه سیستم محدود است به حضور شرایط مرزی تناوبی

وقتی اندازه سیستم بی‌نهایت است

در صورتی که اندازه محدود باشد و شرط مرزی دوره‌ای هم نباشد یعنی آزاد در نظر بگیریم لذا

نظم کمتری خواهیم داشت

الف $T_c(L) < T_c(\infty)$

موارد بالا را بعدا در بحث اثرات اندازه محدود finite size Effect توضیح خواهیم داد.