بسم الله الرحمن الرحیم

نکاتی در خصوص پاسخ سؤالات میان ترم دوم ۲۵ بهمن ۱۴۰۲

Aswer 1.

$$\mathcal{H} = \sum A_i \cdot p_i^3 + U$$

$$U \sim \frac{1}{r}$$

$$[\mathcal{H}_{Kinetic}] \sim \frac{1}{r_n^3}$$

$$[U] \sim \frac{1}{r_n}$$

$$n = \frac{N}{V} =$$ چگالی تعداد

حجمی که فقط یک ذره در آن پیدا می‌گردد $= \frac{4}{3}\pi r_n^3 = \frac{1}{n} \longrightarrow n \sim r_n^{-3}$

$$\left[\frac{U}{E_{Kin}}\right] \sim \left[\frac{\frac{1}{r_n}}{\frac{1}{r_n^3}}\right] \sim [r_n^2] \sim [n^{-2/3}]$$

$$\left[\frac{U}{E_{Kin}}\right] \sim 1$$ در تمرین دوم گفته شده

با توجه به اینکه $n \sim 10$ است پس

$$\left[\frac{U}{E_{Kin}}\right] \sim 10^{-2/3} \sim 0.2 < 1$$

پس سیستم در وضعیت غیر برهمکنشی است. زیرا که اگر U بیشتر از E_{Kin} باشد

یعنی برهمکنشی پس $[u/E_{kin}] \gtrsim 1$ نیمه برهمکنشی

و چون ندارن حالت $[u/E_{kin}] \sim 0.2 < 1$ پس غیر برهمکنشی است

۲- دمای منفی با عنایت به توزیع آماری

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U}\bigg|_{V,N}$$

یعنی اینکه با افزایش انرژی به جای اینکه آنتروپی افزایش پیدا کند شاهد کاهش باشیم.

پس تغییرات آنتروپی با انرژی منفی شده و به لحاظ آماری در رژیم دمای منفی هستیم.

ب:

$$N = N^- + N^0 + N^+$$

$$E_{total} = N^-\epsilon^- + N^0\epsilon^0 + N^+\epsilon^+ \quad , \quad \epsilon^- = -\epsilon,\ \epsilon^0 = 0,\ \epsilon^+ = \epsilon$$

$$S = K_B \ln \Omega \quad , \quad \Omega = \frac{N!}{N^+!\,N^-!\,N^0!}$$

با فرض ثابت بودن مقادیر N

$$\left.\begin{aligned} N^+ &= \frac{E}{\epsilon} + \frac{N}{2} - \frac{N^0}{2} \\ N^- &= \frac{N}{2} - \frac{N^0}{2} - E/\epsilon \end{aligned}\right\} \longrightarrow S(E, N, N^0) = \checkmark$$

$$\Omega = \sum_{N^+=0}^{N} \frac{N!}{N^+!\,N^-!\,(N-N^--N^+)!}$$

البته محاسبه کلیه حالات در دسترس باید به دست

انجام شود و از روی آن S به دست آید.

به یک رهیافت Canonical مسئله خیلی راحت است.

$$Z(T,V,N) = \left[Z(T,V,1)\right]^N$$

$$Z(T,V,1) = e^{+\beta\epsilon} + 1 + e^{-\beta\epsilon} = 1 + \mathrm{Cosh}(\beta\epsilon)$$

$$F = -K_B T \ln Z \quad , \quad U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \quad , \quad S = \frac{U-F}{T}$$

البته در اینجا منظور من این نبود به این روش حساب شود.

$$S = K_B \ln \Omega$$ ۳-

$$\Omega = \sum_{i=1}^{M} n_i$$

$$p_i = \frac{n_i}{\Omega}$$

$$S = K_B \sum_{i=1}^{M} p_i \ln p_i = -K_B \sum_{i=1}^{M} \frac{n_i}{\Omega} \ln \frac{n_i}{\Omega}$$

$$S = -\frac{K_B}{\Omega} \sum_{i=1}^{M} n_i \ln n_i + \frac{K_B}{\Omega} \sum n_i \ln \Omega$$

$$S = -\frac{K_B}{\Omega} \sum_{i=1}^{M} n_i \ln n_i + \frac{K_B \ln \Omega}{\cancel{\Omega}} \frac{\sum_{i=1}^{M} n_i}{\cancel{\Omega}}$$

$$S = K_B \ln \Omega - \frac{K_B}{\Omega} \sum_{i=1}^{M} n_i \ln n_i$$

در حالت تعادل آن ترکیب حالتی اتفاق می‌افتد که بیشترین آنتروپی را داشته باشد در حد ترمودینامیک

ریز حالاتی که بیشترین ریز حالات را داشته باشد غالب است و می‌توان تصور کرد که بقیه ریز حالات

اهمیت ندارند و احتمال رخ دادن هر کدام نیز یکسان است پس

$$p_i = \frac{n_i}{\Omega} = cts \sim \frac{1}{\Omega}$$

$$-K_B \ln\frac{1}{\Omega}\underbrace{\sum_{i=1}^{M} p_i}_{\sim 1} \Rightarrow K_B \ln\Omega = S$$

۴- در حالت میکروکانونی فرض کردیم $E = U = cts$ اما یک افت و خیز داریم.

افت و خیز نسبی $= \frac{\Delta}{E} \sim \frac{\sqrt{N}}{N} \sim O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$

$\Delta \sim \sqrt{N} \leftarrow$ افت و خیز در مقدار انرژی

را با الهام از تابع توزیع دو حالته آنجا که حول مطلوب یعنی حالت سطح انرژی متوسط و احتمال

اینکه انرژی E داشته باشیم با حساب $E = \langle H \rangle$ تعریف می‌شود

و افت و خیز داریم $\Delta^2 = \sigma_E^2 = \langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle$

$$\simeq N$$

پس

$$\Delta \sim \sqrt{N}$$

پس

$$\frac{\Delta}{E} \sim \frac{\sqrt{N}}{N}$$